

Воронежский Государственный Педагогический Университет

Трохова Наталья Сергеевна

Методы решения обратных задач для уравнений параболического типа

1. Общая постановка обратных задач

Математика есть метод познания явлений природы для управления ими. Процесс познания всегда связан с построением некоторой модели, правильность которой проверяется практикой.

Пусть z - искомая характеристика модели, а u (следствие z) - величина сопоставляемая с реально наблюдаемой. Прямая задача об определении и по заданному z дается выражением

$$A(z)=u, \quad (1)$$

Причем предполагается, что решение рассматриваемой задачи единственно (каждому z отвечает вполне определенное u). Так, например, если z - краевой температурный режим, таким образом, ему отвечает единственное значение температуры (u) в любой точке внутри нагреваемого тела. Оператор A при этом имеет одномерной системы с постоянными тепловыми характеристиками хорошо известное интегральное выражение. Наблюдаемая величина \tilde{u} обычно задана с некоторой погрешностью $\|\bar{u} - \tilde{u}\| \leq \delta$, если \bar{u} - точное значение «наблюдаемой». Нас интересует обратная задача: найти z по заданному \tilde{u} . Речь идет о решении операторного уравнения (1), где $u = \tilde{u}$. Предположим даже, что закон соответствия $z \rightarrow u$ (оператор A) адекватен действительной связи между этими величинами. Тогда указанная постановка некорректна прежде всего по той причине, что при заданном \tilde{u} решение уравнения (1) может отсутствовать: $\tilde{u} = Az$ ни при каком z . Для уравнения (1) малым возмущением \bar{u} , то есть заданному \tilde{u} , могут отвечать сколь угодно большие возмущения искомого z , то есть решение неустойчиво относительно малого возмущения входных данных. Таким образом, задача о поиске точного решения уравнения (1) с приближенными входными данными оказывается некорректно поставленной и по этой причине.

Более естественная постановка обратной задачи, учитывающая то, что \tilde{u} не обязана точно соответствовать выбранной модели z , состоит в том, чтобы найти все элементы z , удовлетворяющие неравенству

$$\|Az - \tilde{u}\| \leq \delta \quad (2)$$

Действительно, все z , удовлетворяющие (2), эквивалентны с точки зрения выбора модели при заданном уровне δ погрешности входных данных и при отсутствии какой-либо дополнительной информации об искомой модели.

2. Обратные задачи теплопроводности и их классификация

2.1. Постановка обратных задач

Рассмотрим сначала постановку прямой задачи теплопроводности. Уравнение теплопроводности относится к уравнениям параболического типа и имеет вид:

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(x, t)$$

В области $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ найдем функцию $U(x, t) \in C^{2,1}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(x, t) \quad (x, t) \in Q_T \quad (1)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in (0, l) \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 U(0, t) + \beta_1 U_x(0, t) &= \gamma_1(t) \\ \alpha_2 U(l, t) + \beta_2 U_x(l, t) &= \gamma_2(t) \end{aligned} \right| t \in (0, T] \quad (3)$$

где (2) - начальное условие, то есть условия, налагаемые на $U(x, t)$ в начальный момент времени, (3) - граничные условия. Здесь $a^2, f(x, t); \varphi(x); \alpha_{1,2}; \beta_{1,2}; \gamma_{1,2}$ - известные величины.

Рассмотрим частные случаи системы:

- 1) Если $\beta_1, \beta_2 = 0$, то получим первую краевую задачу;
- 2) Если $\alpha_1, \alpha_2 = 0$, то получим вторую краевую задачу;
- 3) Если $\gamma_1, \gamma_2 = 0$, то получим третью краевую задачу.

Прямая задача теплопроводности является корректно поставленной.

Обратные задачи теплопроводности обычно связаны с интерпретацией и обработки результатов реальных тепловых экспериментов. В действительности же темп измерения температуры в удаленных внутренних точках может оказаться ниже темпа измерения температуры внешней поверхности. Таким образом, нарушается непрерывная зависимость результатов от входных температурных данных.

Кроме того, входная информация известна с погрешностью при точном решении задачи, и ошибки входных данных могут быть значительно усилены. Поэтому решение обратных задач теплопроводности должно основываться на таких приближенных методах, которые в состоянии подавить неустойчивость результата при соблюдении в то же время требуемой точности.

Рассмотрим общую постановку обратной задачи теплопроводности. Требуется определить условие и поле температур в том, процесс передачи тепла, в котором описывается обобщенным квазилинейным уравнением теплопроводности, при заданном начальном условии и известных температурах в двух точках внутри тела. Эти точки и границы тела являются подвижными. Законы их передвижения определены известными функциями.

Таким образом, имеем:

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + K(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \psi(T) \quad (1')$$

$$0 \leq \tau \leq \tau_m \quad x_1(\tau) < x < x_4(\tau)$$

$$T(x, 0) = \varphi(x) \quad (2')$$

$$T(x_2(\tau), \tau) = f_2(\tau), T(x_3(\tau), \tau) = f_3(\tau) \quad (3')$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x_1(\tau), \tau)}{\partial x} = q_1(\tau), T(x_1(\tau), \tau) = T_1(\tau) \quad (4')$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x_4(\tau), \tau)}{\partial x} = q_4(\tau), T(x_4(\tau), \tau) = T_4(\tau)$$

Движение внешних границ тела могут быть обусловлено уносом массы, например, в процессе абляции (унос массы с поверхности твердого тела потоком горячих газов) материала тела, а движение точек с известными температурами определяется эффектами, а движение точек с известными температурами определяется термической усадки.

Формулировка проблемы в виде (1')-(4') является общепостановочной и в процессе своего решения она должна быть конкретизирована. Выделяются три возможных случая: краевая постановка, постановка в форме Коши и вариационная постановка задачи. В своей аттестационной работе я рассматриваю два возможных случая.

2.2 Краевая постановка обратных задач теплопроводности

Предполагается, что если алгоритм решения соответствующей прямой задачи $f = AU$ и найден способ его «обращения» с целью установления связи:

входные данные \rightarrow граничное условие

$$U = R(f)$$

1) Для линейных задач с подвижными границами такие постановки могут быть получены на основе теории тепловых потенциалов;

2) Алгоритм решения обратной задачи теплопроводности может быть упрощен, если воспользоваться принципом расширения исходной области (x, τ) до прямоугольной.

$$\{x_1 \min(\tau) \leq x \leq x_4 \max; 0 \leq \tau \leq i_m\}$$

В результате исходная обратная задача теплопроводности может быть разделена на две обратные задачи по определению фиктивных температур или тепловых потоков на новых, условно введенных границах. Недостаток этого способа связан с ухудшением характеристик точности и устойчивости новых обратных задач по сравнению с исходной из-за большого удаления точек фиктивных границ от точек с входными температурами.

3) Обратные задачи могут быть решены численными методами на основе различных разностных схем (явной и неявной)

2.3 Обратные задачи в постановке Коши

Ищется продолжение решения уравнение теплопроводности с границы малой области, где заданы значения температур и теплового потока на большую область вплоть до его границ с искомыми условиями. Общий момент такой постановки обратных задач теплопроводности заключается в необходимости предварительного вычисления теплового потока на линиях $x_2(\tau)$ и $x_3(\tau)$ при решении прямой задачи в области $\{x_2(\tau) \leq x \leq x_3(\tau), 0 \leq \tau \leq \tau_m\}$.

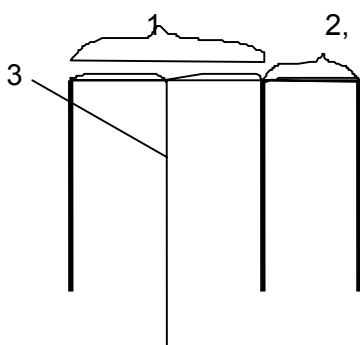
1) В этом случае для линейных задач также применим аппарат тепловых потенциалов;

2) Целый ряд алгоритмов для указанных задач, в том числе и для нелинейного исходного случая (1')-(4') может быть получен разностными методами с использованием явных и неявных схем.

2.4. Рассмотрим в качестве примера одномерную задачу теплопроводности в

двухслойной пластине (рис 1), полагая,

что материалы слоев имеют разные теплофизические характеристики, и в одном из них фазовый переход, например, происходит плавление



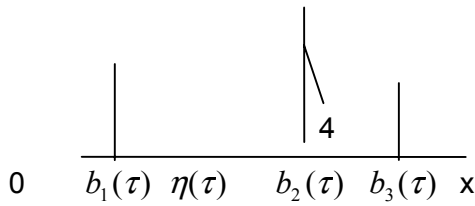


Рис1. Двуслойная пластина с фазовым переходом. 1,2-первый и второй слой; 3-граница фазового перехода; 4-линия контакта слоев; а,б - два фазовых состояния материала первого слоя

материала. Границы слоев $b_1(\tau), b_2(\tau), b_3(\tau)$ могут перемещаться с течением времени вследствие каких-либо процессов (уноса массы,

термической усадки материалов, механических деформаций).

Подвижным является также и внутренний фронт фазового превращения $\eta(\tau)$.

Будем считать, что температурное поле $T(x, \tau)$ в пластине на временном интервале $\tau \in (0, \tau_m)$ описывается системой уравнений обобщенной теплопроводности.

$$C_j \frac{\partial T_j}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial x} \right) + K \frac{\partial T_j}{\partial x} + S_j; j = 1, 2, 3 \quad (3)$$

соответственно в областях $b_1(\tau) < x < \eta(\tau), \eta(\tau) < x < b_2(\tau), b_2(\tau) < x < b_3(\tau)$.

При этом условиями сопряжения на линиях $\eta(\tau)$ и $b_2(\tau)$ является

$$T_1(\eta(\tau) - 0, \tau) = T_2(\eta(\tau) + 0, \tau);$$

$$\lambda_{11} \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=\eta(\tau)-0} - \lambda_{12} \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=\eta(\tau)+0} = r \frac{\partial \eta}{\partial \tau};$$

$$T_2(b_2(\tau) - 0, \tau) = T_3(b_2(\tau) + 0, \tau) - R \lambda_{12} \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=b_2(\tau)-0};$$

$$\lambda_{12} \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=b_2(\tau)-0} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=b_2(\tau)+0}$$

Присовокупим к системе (3) также начальные распределения температур

$$T_j(x, 0) = \xi_j(x), j = 1, 2, 3$$

соответственно при $b_1(0) < x < \eta(0), \eta(0) < x < b_2(0), b_2(0) < x < b_3(0)$

и условие на границах пластины. В качестве граничных условий могут рассматриваться температуры

$$T_j(b_j(\tau), \tau) = t_j(\tau), j = 1, 3;$$

тепловые потоки

$$-\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=b_j(\tau)} = q_j(\tau), j = 1, 3;$$

ньютоновские условия конвективного теплообмена

$$-\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=b_j(\tau)} = \alpha_o [T_j(b_j(\tau), \tau) - T_j^*(\tau)], j = 1,3;$$

и условия, учитывающие теплообмен тела с окружающей средой путем конвекции и излучения, а также источник (сток) теплоты на поверхности, обусловленный другими процессами (плавлением, сублимацией, рекомбинацией атомов и т.д.),

$$-\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=b_j(\tau)} = \alpha_o [T_j(b_j(\tau), \tau) - T_j^*(\tau)] + A_j q_{rj} - \epsilon_j \sigma T_j^4(b_j(\tau), \tau) + q_j, j = 1,3,$$

где q_r - падающий поток излучения; σ -постоянная Стефана - Больцмана. Возможны также различные сочетания перечисленных граничных условий на линиях $b_1(\tau)$ и $b_2(\tau)$.

Коэффициенты C_j, λ_j, K_j и источник S_j в общем случае могут быть функциями координаты x временем τ и температуры T_j или любой комбинацией этих переменных; в простейшем случае они являются константами. Величины $r, R, \alpha_j, A_j, \epsilon_j, q_j$ могут рассматриваться функциями времени и соответствующей температуры.

В данной задаче причинными характеристиками будут объемные теплоемкости C_j , коэффициенты теплопроводности λ_j , конвективные коэффициенты K_j , источники S_j , законы движения границ b_1, b_2, b_3 и фронта фазового превращения r , контактное тепловое сопротивление R , граничные температуры t_j , тепловые потоки q_j , температуры окружающих средств T_j^* , коэффициенты поглощения A_j , степени черноты ϵ_j и поверхностные источники тепла g_j . Обратная задача заключается в определении тех или иных величин из приведенной совокупности причинных характеристик. При этом должны быть заданы некоторые дополнительные условия. В большинстве случаев или является температурным измерения $T(d_i, \tau) = f_i(\tau)$, $i = \overline{1, N}$ в N неподвижных или перемещающих точках d_i тела, реже рассматривается пространственно непрерывные измерения температур.

В соответствии с введенными выше причинными характеристиками теплообменного процесса можно выделить следующие виды обратных задач:

1. *ретроспективную задачу теплопроводности* или задачу с обратным временем - нахождение распределений температуры в предыдущий момент времени (установление предыстории данного теплового состояния);

2. *граничную обратную задачу теплопроводности* - восстановление тепловых условий на границе тела. К этому виду отнесем также задачу, связанную с продолжением решения уравнения теплопроводности от некоторой границы $x=M(\tau)$, где одновременно заданы температура $T(M(\tau),\tau)$ и плотность теплового потока $q(M(\tau),\tau)$;
3. *коэффициентную обратную задачу теплопроводности* - определение коэффициентов уравнения переноса теплоты.
4. Наконец, можно ввести еще один вид обратной задачи - *геометрическую обратную задачу теплопроводности*, состоящую в нахождении некоторых геометрических характеристик нагреваемого тела, например, в реконструировании закона движения теплообменной границы тела по результатам измерений температуры внутри тела.

Сделаем некоторые замечания, связанные с постановкой обратных задач теплопроводности.

1. Определение функции и параметров, входящих в граничное условие (коэффициента теплообмена α в граничном условии третьего рода, контактного сопротивления R в граничных условиях четвертого рода, интегральных коэффициентов поглощения и излучения A, ϵ) обычно можно свести к граничной обратной задаче теплопроводности. Например, коэффициент $\alpha(\tau)$ рассчитывается по плотности конвективного теплового потока $q_k(\tau)$, температуре поверхности тела $T_w(\tau)$ и характеристикой температуры газа (жидкости), обтекающего тела $T^*(\tau)$:

$$\alpha(\tau) = \frac{q_k(\tau)}{T^*(\tau) - T_w(\tau)}$$

Величина $q_k(\tau)$ находится из уравнения теплового баланса на поверхности тела по изученной плотности кондуктивного теплового потока. В предположении, что тепловое излучение газа, а также унос массы и вздув в пограничный слой отсутствуют, имеем $q_k(\tau) = q(\tau) + \epsilon \sigma T_w^4(\tau)$.

- В такой постановке дополнительно должны быть заданы функция $T^*(\tau)$ и коэффициент ϵ . Функции $q(\tau)$ и $T_w(\tau)$ вычисляются из решения граничной обратной задачи теплопроводности.
2. Задача определения некоторой причинной характеристики может быть переопределена, то есть задача имеет не одно, а несколько дополнительных условий.
 3. Возможны комбинированные постановки обратной задачи теплопроводности, когда совместно ищутся причинные характеристики

разных типов. Например, одновременно могут оцениваться условия и температурное поле в прошедшие моменты времени в задаче без начальных условий - комбинаций граничной и коэффициентной задач, а также граничной и геометрической обратных задач теплопроводности.

В общем случае обратные задачи теплопроводности в зависимости от используемой модели процесса и вида области изменения независимых переменных делятся на одномерные и многомерные, линейные и нелинейные, с фиксированными и подвижными границами, односвязные и многосвязные.

3. Понятие некорректности обратных задач теплопроводности

3.1 Условие Адамара

Общая запись обратной задачи может быть представлена в форме операторного уравнения $Au = f, u \in U, f \in F$ (1)

Здесь u и f - соответственно искомая и наблюдаемая характеристики, которые трактуются как элементы метрических пространств U и F . Оператор $A:U \rightarrow F$ предполагается заданным, имеет область определения $D(A) \subseteq U$ и область значения $R(A) \subseteq F$.

Задача решения уравнения (1) называется корректно поставленной по Адамару, если:

- 1) для любой $f \in R(A) = F$ существует решение $u \in U$ (условие разрешимости);
- 2) решение является единственным в U (условие однозначности);

В качестве примера доказательства единственности решения возьмем ретроспективную обратную задачу теплопроводности.

Сначала введем некоторые обозначения. Пусть $b, \tau_m = \text{const} > 0$. Через Q_0 обозначим множество $Q_0 = (0, b) \times (0, \tau_m)$. Для целых $n > 0$ R^n - n -мерное евклидово пространство. Для целых $k \geq 1$ и для области $\Omega \subset R^n$ через $C^k(\bar{\Omega})$ обозначим множество k раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций. Через $C^{2k, k}(\bar{Q}_0)$ обозначим множество функций $u(x, \tau)$, имеющих непрерывные в \bar{Q}_0 производные $\frac{\partial^{s+r}}{\partial x^s \partial \tau^r} u(x, \tau), 0 \leq 2r + s \leq 2k$. Теоремы единственности ретроспективных обратных задач теплопроводности, как правило, вытекают из следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $a(x, \tau) \in C^1(\overline{Q_0})$, $a \geq a_0 = \text{const} > 0$, а функция

$T(x, \tau) \in C^{2,1}(\overline{Q_0})$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} T(x, \tau_m) &= 0, x \in (0, b), \\ T(0, \tau) &= T(b, \tau) = 0, \tau \in (0, \tau_m) \end{aligned} \quad (2)$$

и дифференциальному неравенству

$$|T_\tau - a(x, \tau)T_{xx}| \leq M(|T_x| + |T|), (x, \tau) \in Q_0.$$

Тогда $T(x, \tau) \equiv 0$ в Q_0 .

Причем в (2) вместо краевых условий первого рода можно задать краевые условия второго рода (можно даже при $x=0$ задать условие первого рода, а при $x=b$ - второго рода и наоборот).

Покажем теперь, как с помощью теоремы 1 доказать единственность ретроспективной обратной задачи для уравнения теплопроводности, причем будем исходить из общего принципа согласно которому вопрос о единственности нелинейной задачи может быть сведен к вопросу о единственности подходящей линейной задачи.

Рассмотрим следующую обратную задачу теплопроводности:

$$T_\tau = (\lambda(T), T_x)_x, (x, \tau) \in Q_0 \quad (2.1)$$

$$T(0, \tau) = q_1(\tau), \tau \in (0, \tau_m) \quad (2.2)$$

$$T(b, \tau) = q_2(\tau), \tau \in (0, \tau_m) \quad (2.3)$$

$$T(x, \tau_m) = f(x), x \in (0, b) \quad (2.4)$$

$$T \in C^{2,1}(\overline{Q_0}) \quad (2.5)$$

Требуется определить функцию T в Q_0 , считая известными остальные функции в (2.1)-(2.4). Функцию $\lambda(z)$ будем считать определенной на всей числовой прямой R и $\lambda(z) \geq \lambda_0 = \text{const} > 0$, при любом $z \in R$; $\lambda(z) \in C^2(R)$ (2.6)

Теорема 2.

При условии (2.6) найдется не более одного решения задачи (2.1)-(2.5).

Доказательство. Пусть имеются два решения T_1, T_2 . Обозначим $v = T_1 - T_2$.

Имеем уравнения
$$T_{1\tau} = (\lambda(T_1), T_{1x})_x \quad (2.7)$$

$$T_{2\tau} = (\lambda(T_2), T_{2x})_x \quad (2.8)$$

Вычитая (2.8) из (2.7) получаем

$$\begin{aligned} v_\tau &= (\lambda(T_1)T_{1x} - \lambda(T_2)T_{2x})_x = [\lambda(T_1)(T_{1x} - T_{2x}) + (\lambda(T_1) - \lambda(T_2))T_{2x}]_x = \\ &= (\lambda(T_1)v_x)_x + [(\lambda(T_1) - \lambda(T_2))T_{2x}]_x. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Раскрывая скобки в (2.9), получаем

$$v_\tau - \lambda(T_1)v_{xx} = \lambda'(T_1)T_{1x}v_x + (\lambda(T_1) - \lambda(T_2))T_{2xx} + (\lambda'(T_1)T_{1x} - \lambda'(T_2)T_{2x})T_{2x} \quad (2.10)$$

$$\lambda' \equiv \frac{d\lambda}{dT}$$

Согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$\lambda(T_1) - \lambda(T_2) = \lambda'(Q_1T_1 + (1 - Q_1)T_2)(T_1 - T_2) = \lambda'(Q_1T_1 + (1 - Q_1)T_2)v \quad (2.11)$$

где $Q_1 = Q(x, \tau) \in (0, 1)$

Из аналогичных соображений получаем

$$\begin{aligned} \lambda'(T_1)T_{1x} - \lambda'(T_2)T_{2x} &= (\lambda'(T_1) - \lambda'(T_2))T_{1x} + \lambda'(T_2)v_x = \\ &= [\lambda''(Q_2T_1 + (1 - Q_2)T_2)T_{1x}]v + \lambda'(T_2)v_x \end{aligned} \quad (2.12)$$

$Q_2 = Q_2(x, \tau) \in (0, 1)$

Поскольку функции λ', λ'' ограничены как функции переменных $(x, \tau) \in \overline{Q_0}$, то ,

обозначая $a(x, \tau) = \lambda(T_1(x, \tau))$, согласно (2.10)-(2.12) получаем

$$|v_\tau - a(x, \tau)v_{xx}| \leq M[|v_x| + |v|], \quad (x, \tau) \in Q_0, \quad M = \text{const} > 0 \quad (2.13)$$

Кроме того, используя (2.2)-(2.5), будем иметь

$$v(0, \tau) = v(b, \tau) = 0, \quad \tau \in (0, \tau_m)$$

$$v(x, \tau_m) = 0, \quad x \in (0, b)$$

$$v \in C^{2,1}(\overline{Q_0}) \quad (2.14)$$

Из основания (2.13), (2.14) и теоремы 1 получаем $v(x, \tau) \equiv 0$ в $\overline{Q_0}$.

Что и требовалось доказать.

Отметим, что в (2.2), (2.3) вместо краевых условий первого рода можно задать краевые условия второго рода.

3) решение непрерывно зависит от функции f (условие устойчивости);

Очевидно, что корректность постановки задачи с точки зрения устойчивости решения зависит от выбора пары пространств U и F . Этот выбор обычно связан с результатами измерений на некотором реальном объекте и поэтому отягощен случайными погрешностями. Эти погрешности имеют место в любой точке сегмента $[0, \tau_m]$, то есть $f_\delta(\tau)$ может быть даже разрывной функцией, что приводит к неустойчивому решению обратной задачи.

Если нарушается хотя бы одно из перечисленных требований, задача (1) называется некорректно поставленной.

3.2 Несколько примеров некорректно поставленных задач

Многие классические задачи математики являются некорректно поставленными. В ряде случаев с их неустойчивостью столкнулись лишь в последнее время при широком применении для их решения численных методов. Приведем несколько примеров таких задач.

1. Задача численного дифференцирования. При вычислении производной обычное разностное отношение $R(\tilde{u}, \alpha) = \frac{1}{\alpha} [\tilde{u}(x + \alpha) - \tilde{u}(x)]$ является регуляризирующим оператором при $\frac{\partial}{\partial \alpha}(\partial) \rightarrow 0$. Таким образом, выбор в качестве приближенного решения \tilde{z}_s представляет метод устойчивого приближения к \tilde{z} , хотя задача и является неустойчивой.
2. Численное суммирование рядов Фурье.

Пусть, например, $\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \sin nx$, но вместо \bar{b}_n даны их приближения

$\tilde{b}_n = \bar{b}_n + \beta_n$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx$. Коэффициенты β_n ,

связанные с неточностью исходных данных, могут убывать медленно, и

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ может дать сколь угодно большую погрешность в результате.

Обратные задачи магнитометрии, электромагнитные и зондирования земной коры также являются некорректно поставленными.

- 1). Зондирование атмосферы. Целью этой задачи является определение температурного разреза атмосферы в зависимости от спектрального состава излучения атмосферы, например, на искусственных спутниках Земли. Спектральный состав излучения каждого элементарного объема воздуха зависит от планковского распределения излучения по спектральному составу. Таким образом, спектральный состав излучения, принимаемый на границе атмосферы, выражается с помощью интервала, зависящего от температурного разреза атмосферы. Определение температуры сводится к решению соответствующего интегрального уравнения. Его можно рассматривать в линейном и нелинейном приближении.
- 2). Обратные задачи радиоастрономии. Они заключаются в определении формы небесных объектов, испускающих радиоизлучение, по радиоизлучению, принимаемому на поверхности Земли с помощью радиотелескопов.

3). Обратные задачи астрономии, например, задачи определения светимости различных участков поверхности небесных тел по изменению их интегральной светимости во время затмений, а также задачи изучения плотности вещества, заполняющего космическое пространство.

4. Понятие регуляризации

При анализе корректных обратных задач теплообмена было установлено, что их решение может не обладать свойством устойчивости. С этой особенностью обратных задач связаны основные трудности построения эффективных вычислительных алгоритмов. Если не изменить исходную постановку неустойчивой задачи, то методы, разработанные для решения хорошо поставленных задач, далеко не всегда оказываются пригодными применительно к обратным задачам. Стремление получить точное значение u через начальные условия, выраженные функцией f , заданной с некоторой погрешностью δ , ведет к неустойчивому решению.

Рассмотрим возможные принципы получения устойчивых решений обратных задач. Условно разделим их на две группы :

- 1) саморегуляризация обратных задач;
- 2) регуляризация по методу А.Н.Тихонова.

4.1. Саморегуляризации (естественная регуляризации)

Понятие саморегуляризации означает, что обратная задача решается в своей исходной постановке, но с помощью таких приближенных методов, которые допускают управление мерой близости получаемого решения к “точному” в результате изменения параметров вычислительных алгоритмов.

Источники естественной регуляризации решения обратных задач могут быть связаны:

- 1) С эффектом регуляризации режима нагрева точки тела, в которой установлен датчик температуры.
- 2) С “вязкостными” свойствами вычислительных алгоритмов, заключающимися в естественной фильтрации высокочастотных составляющих в искомой причинной характеристике.

Первый принцип обычно реализуется в виде шаговой регуляризации обратных задач теплопроводности. Искомая причинная характеристика, представляющая собой непрерывную кривую $u(z)$, заменяется кусочно-однородной аппроксимирующей зависимостью, т.е. полный отрезок изменения аргумента z разбивается на интервалы с шагами $\Delta z_n = z_n - z_{n-1}, n = 1, 2, \dots, N$, и

на каждом интервале кривая описывается зависимостями одного и того же вида. Важно заметить, что в качестве этих зависимостей берутся наиболее регулярные функции, имеющие минимальное количество производных. Обычно применяется кусочно-постоянная, реже – кусочно-линейная аппроксимация. При этом величина шага Δz_n выбирается из условия, что изменение температуры в точке измерения, вызванное действием аппроксимированного причинного фактора на данном интервале, было бы различимо на фоне различных ошибок (погрешностей измерений, помех, ошибок аппроксимации и округления).

Например, требуется определить изменение теплового потока $q(\tau)$ на границе тела по внутренним температурным измерениям. Кривая $q(\tau)$ заменяется ступенчатой линией, причем продолжительность каждой ступеньки выбирается таким образом, чтобы приращение температуры в заданной точке тела было бы достаточно большим по сравнению с сопутствующими ошибками

Второй принцип регуляризации, основанный на “вязкостных” свойствах вычислительных алгоритмов, также служит для подавления ненужных гармоник в решении обратной задачи с помощью целенаправленного выбора некоторых параметров алгоритмов, управляющих гладкостью приближенных решений. Этот принцип может быть реализован:

- 1) соответствующим выбором шагов аппроксимации исходной задачи в различных численных методах решения обратных задач теплопроводности;
- 2) соответствующим выбором степени аппроксимирующего полинома для искомой величины.

Одним из примеров саморегуляризации является метод искусственной гиперболизации. Суть его заключается в том, что при решении

гиперболического дифференциального уравнения $\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (*).

Параметр α определяется таким образом, чтобы значения уравнения (*) совпадали со значениями уравнения параболического типа. Для нахождения необходимого значения параметра α мною использовалась следующая программа:

```
program pr1;
uses crt;
const l=0.92;
      h=0.2;
      k=0.0000001;
      r=8.89;
```

```

    c2=0.093;
label a1;
var i:integer;p,k1:real;m:longint;
procedure metod(k1:real);
var u1,c,a,b,f,a1,b1:array[0..15] of real;
    u2,u3,u:array[0..800] of real;
    w,i,i2,ll:real;
    i1,s,n,f1,f2,n1:integer;j:longint;
begin
i:=0;s:=0;n:=1;
repeat
u1[s]:=i*i*(3.64-i*i)+100*i;
i:=i+h;s:=s+1;
until s=10;s:=s-1;
textcolor(4);write(0,' ');textcolor(2);
for i1:=0 to s do write(' ',u1[i1]:2:2);
j:=1;writeln;
repeat
u[0]:=0;u[s]:=j*k+180;
for i1:=1 to s-1 do
begin
c[i1]:=-(c2*r*h*h+2*l*k);f[i1]:=u1[i1]*h*h*c2*r;
end;
f[1]:=u1[1]*h*h*c2*r+l*k*u[0];
f[s-1]:=u1[s-1]*h*h*c2*r+l*k*(j*k+180);
for i1:=2 to s-1 do a[i1]:=-l*k;
for i1:=1 to s-2 do b[i1]:=-l*k;
a1[1]:=b[1]/c[1];b1[1]:=-f[1]/c[1];
for i1:=2 to s-1 do
begin
a1[i1]:=b[i1]/(c[i1]-a[i1]*a1[i1-1]);
b1[i1]:=(a[i1]*b1[i1-1]-f[i1])/(c[i1]-a[i1]*a1[i1-1]);
end;
u[s-1]:=b1[s-1];
for i1:=s-2 downto 1 do u[i1]:=a1[i1]*u[i1+1]+b1[i1];
j:=j+1;
if j=k1*n then
begin
textcolor(4);write(k*(j-1):1:8);textcolor(2);
for i1:=0 to s do write(' ',u[i1]:2:2);n:=n+1;writeln;
end;
if j=2 then for i1:=0 to s do u2[i1]:=u[i1];
for i1:=0 to s do u1[i1]:=u[i1];
until j=m;
i2:=0;textcolor(4);
for i1:=0 to s do
begin
if i2<1.2 then begin gotoxy(12+6*i1,14);write(i2:2:1);i2:=i2+h;end
else begin gotoxy(7+7*i1,14);write(i2:2:1);i2:=i2+h;end
end;
writeln;
i:=0;s:=0;n:=1;
repeat
u1[s]:=i*i*(3.64-i*i)+100*i;
i:=i+h;s:=s+1;

```

```

until s=10;s:=s-1;
textcolor(4);write(0,' ');textcolor(2);
for i1:=0 to s do write(' ',u1[i1]:2:2);
j:=2;writeln;ll:=0.03;
repeat
u[0]:=0;u[s]:=j*k+180;
for i1:=1 to s-1 do
u[i1]:=(k*k)/(h*h*ll)*(u2[i1-1]-2*u2[i1]+u2[i1+1])+2*u2[i1]-u1[i1];
j:=j+1;
if j=k1*n then
begin
textcolor(4);write(k*(j-1):1:8);textcolor(2);
for i1:=0 to s do write(' ',u[i1]:2:2);n:=n+1;writeln;
end;
for i1:=0 to s do begin u1[i1]:=u2[i1];u2[i1]:=u[i1];end;
until j=m;
i2:=0;textcolor(4);
for i1:=0 to s do
begin
if i2<1.2 then begin gotoxy(12+6*i1,25);write(i2:2:1);i2:=i2+h;end
else begin gotoxy(7+7*i1,25);write(i2:2:1);i2:=i2+h;end;
end;
readln;
end;
begin
clrscr;
textcolor(5);
writeln('Введите номер последнего слоя');
readln(m);k1:=m/10;
metod(k1);
end.

```

При решении этой задачи было получено значение $\alpha = 0,03$, причем значения решения уравнения параболического типа совпадают со значениями решениями уравнения гиперболического типа с очень высокой точностью.

Искусственная гиперболизация уравнения теплопроводности позволяет повысить устойчивость численного решения граничных обратных задач теплопроводности.

4.2 Регуляризация неустойчивых обратных задач по методу А.Н. Тихонова

Несмотря на доводы, приведенные в пользу естественных принципов регуляризации обратных задач теплопроводности, имеется большое количество ситуаций, когда методы саморегуляризации, особенно методы шаговой регуляризации, не могут удовлетворить исследователей. Во-первых, с их помощью не всегда удается восстановить достаточно подробные структуры искомого причинных характеристик. Во-вторых, многие экспериментальные тепловые исследования настолько непродолжительны, что критические значения временных шагов при продолжении температурного поля и

восстановлении граничных условий оказываются сравнимы с полным временем эксперимента или даже может быть больше его.

В этих случаях следует прибегать к общему методу регуляризации, разработанного А.Н. Тихоновым для решения неустойчивых задач.

Рассмотрим уравнение $Au=f$, где $u \in U, f \in F$ (4), где U и F -метрические пространства; A -заданный оператор; u, f -искомый и наблюдаемый элементы соответственно.

Полагаем, что в условии разрешимости и однозначности задача (4) поставлена корректно. И в то же время условие устойчивости решения неустойчивых задач, предложенным А.Н. Тихоновым, заключается в построении регуляризующих операторов.

Регуляризующий оператор для задачи (4), под которым понимается оператор R_α , зависящий от скалярного параметра α , отвечает следующим условиям:

- 1) R_α определен на всем пространстве F для любого $\alpha > 0$;
- 2) R_α непрерывен на F ;
- 3) Для любого $u \in U : R_\alpha Au \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} u$.

Параметр α называется параметром регуляризации. Если рассмотреть задачу с погрешностью в правой части и операторе, то естественно, что такое условие приведет к неустойчивому результату. Поэтому важным дополнением к определению регуляризующего оператора является условие о согласовании параметра регуляризации α с погрешностью данных. Выбор параметра α производится на основе определенной информации о решаемой задаче. При правильно подобранном значении α получаемое решение мало отклоняется от точного решения, причем точность приближения определяется точностью задания f и A . Регуляризующий оператор совместно со способом выбора параметра α , отвечающим условию 2), называется регуляризующим алгоритмом для задачи (4).

Некорректная задача называется регуляризуемой, если для нее существует хотя бы один регуляризующий алгоритм.

5. Метод сеток

Сетки и сеточные функции.

Для того, чтобы написать разностную схему, приближенно описывающую данное дифференциальное уравнение, нужно совершить следующие два шага.

1. Необходимо заменить область непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения.
2. Необходимо заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором, а также сформулировать разностный аналог для краевых условий и для начальных данных.

После осуществления такой процедуры мы приходим к алгебраической системе уравнений. Таким образом задача о численном решении исходного (линейного) дифференциального уравнения сводится к вопросу о нахождении решения полученной алгебраической системы. При численном решении той или иной математической задачи мы, очевидно, не можем воспроизвести разностное решение для всех значений аргумента, изменяющегося внутри некоторой области евклидова пространства.

Естественно поэтому выбрать в этой области некоторое конечное множество точек и приближенное решение искать только в этих точках. Такое множество точек называется сеткой. Отдельные точки называются узлами сетки. Функция, определенная в узлах сетки, называется сеточной функцией. Таким образом мы заменили область непрерывного изменения аргумента сеткой, то есть областью дискретного изменения аргумента; иными словами, мы осуществили аппроксимацию пространства решений дифференциального уравнения пространством сеточных функций.

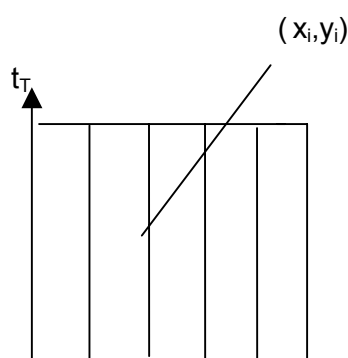
Свойства разностного решения и, в частности, его близость к точному решению зависят от выбора сетки.

Пример. Равномерная сетка на плоскости.

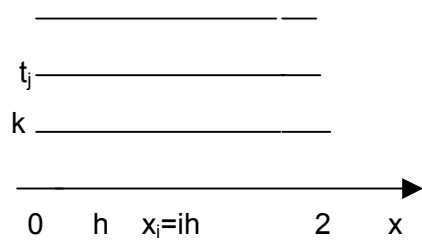
Рассмотрим множество функций двух аргументов $u(x,t)$. В качестве области определения выберем прямоугольник $D=\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$.

Разобьем отрезки $[0,1]$ оси x и $[0,T]$ оси t соответственно на N_1 и N_2 частей;

$$\text{пусть } h = \frac{1}{N_1}, \quad \tau = \frac{T}{N_2}.$$



Через точки деления проведем прямые, параллельные соответствующим осям. В результате пересечения этих прямых



получим узлы (x_i, t_j) , которые и образуют сетку (рис2), $w_{hk} = \{(x_i, t_j) \in D\}$. Эта система имеет шаги h и k соответственно по направлениям x и t . Соседними узлами сетки называются узлы, лежащие на одной и той же прямой (горизонтальной и вертикальной), расстояние между которыми равно шагу сетки (h и k).

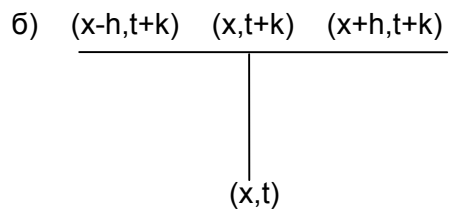
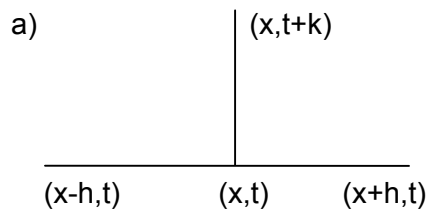
Введем сетки $w_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n\}$, $w_k = \{t_j = jk, j = 0, 1, \dots, m\}$ в D :

$$w_{hk} = w_h \times w_k = \{(ih, jk), i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$
 с шагом $h = \frac{l}{n}$ и $k = \frac{T}{m}$.

Обозначим через u_{ij} значения в узле (x_i, t_j) сеточной функции $u(x, t)$, определенной на w_{hk} . Заменяем производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ первой разностной

производной, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ - второй разностной производной. Пусть (x, t) -

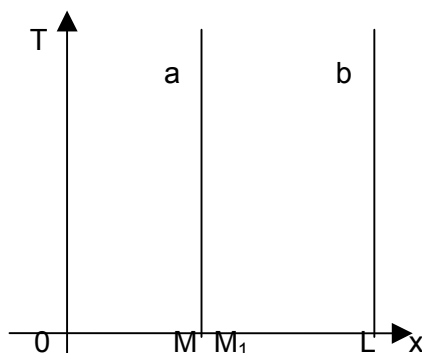
фиксированная точка плоскости (xy) , $h > 0, k > 0$ - два числа (шаги). Чтобы написать разностную аппроксимацию мы должны прежде всего определить шаблоны:



При разностной аппроксимации в зависимости от выбора шаблона мы получаем две возможные разностные схемы:

1. Явная разностная схема при выборе шаблона а)
2. Неявная разностная схема при выборе шаблона б)

6. Пример обратной задачи теплопроводности



Пусть задана область D , в которой нам известны:

1. значения решения, равные нулю, в каждой точке оси OT , являющейся границей данной области;

точках оси OX на отрезке OM, где
 следующим условиям:

- 1) точка M принадлежит области D и ее ордината равна нулю;
 - 2) точка M – внутренняя точка.
3. Значения решения, зависящие от функции $u(0,6;t)=t+60$, на прямой a, проходящей через точку M, параллельной оси ординат.

$$\begin{cases} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, M) \cup (M, L) \\ u(x, 0) = x^2(0,36 - x^2) + 100x, & x \in [0, M] \\ u(0, t) = 0 \\ u(M, t) = t + 60 \end{cases}$$

4. Физические характеристики медного стержня, необходимые для решения :
 плотность - $\rho = 8,89 \text{г} * \text{см}^{-3}$;

удельная теплоемкость - $C = 0,093 \text{кал} * \text{г}^{-1} * \text{град}^{-1}$

коэффициент теплопроводности - $\lambda = 0,92 \text{кал} * \text{см}^{-1} * \text{сек}^{-1} * \text{град}^{-1}$

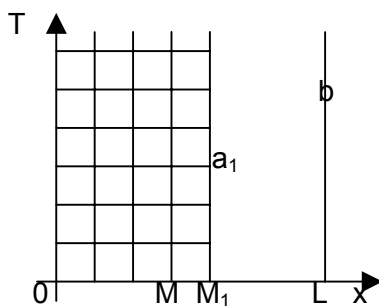
Требуется найти значения решения на всей заданной области, в том числе на прямой b, проходящей через точку L, параллельной оси ординат.

Рассмотрим алгоритм решения задачи:

1. Находим значения решения в области ограниченной прямой a и осью OT, с заданным шагом по оси OX (h) и по оси OT (k).

При решении используется неявная разностная схема, а для получения значений решения в точках этой области – метод прогонки

2. В соответствии с выбранным шагом по оси OX и оси OT находим значения решения на слое, то есть прямой, проходящей через точку M_1 и параллельной прямой a, двумя способами, зависящие от выбора точек области D, то есть шаблона.

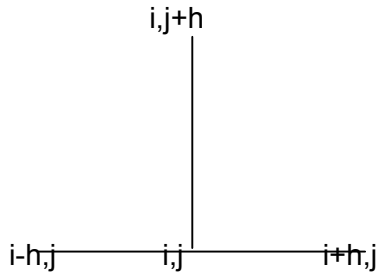


2. значения решения, зависящие от функции $f(x)=x^2(0,36-x^2)+100x$ в точке M, которая удовлетворяет

Рассмотрим первый способ.

Пусть m – номер последней точки, рассматриваемой нами на прямой a_1 . При нахождении значений решений в первых (m-1) точках на слое, то есть прямой, проходящей через точку M_1 и параллельной прямой a, используя шаблон a)

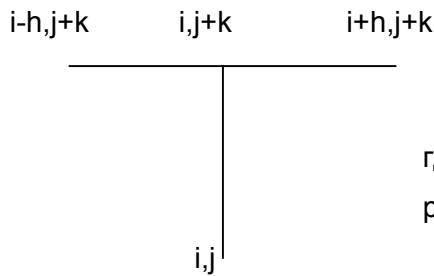
а)



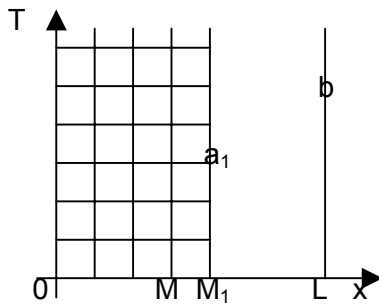
где точка $(i+h,j)$ та, значение решения, которой мы находим

При нахождении значения решения в последней точке с номером m рассматриваемого слоя используется шаблон б)

б)



где точка $(i+h,j+k)$ та, значение решения, которой мы находим.

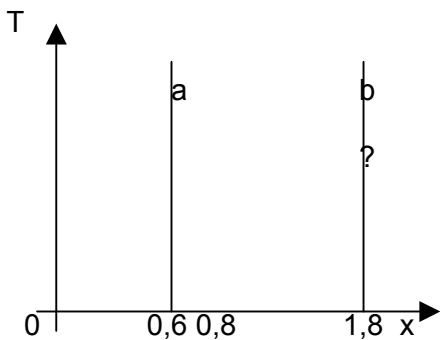


Рассмотрим второй способ.

При нахождении значений решений в начальной точке слоя, то есть прямой, проходящей через точку M_1 и параллельной прямой a , используется шаблон а). При нахождении значений решения в остальных точках на рассматриваемом слое используется шаблон б).

3. Повторяем п.2 до тех пор пока не найдем значения решения на последнем слое, то есть прямой $x=L$.

Приступим непосредственно к решению задачи.



Рассмотри систему:

$$\begin{cases} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in (0;0,6) \cup (0,6;1,8) \\ u(x,0) = x^2(0,36 - x^2) + 100x, x \in [0;0,6] \\ u(0,t) = 0 \\ u(M,t) = t + 60 \\ u(1,8;t) = ? \end{cases}$$

Найти решения этой задачи в области $D=\{x \in (0;1,8], t \in [0;+\infty)\}$

Шаг по оси OX: $h=0,2$ и по оси OT: $k=0,01$

Аппроксимируя систему (I), используя шаблон б), в результате получим следующие формулы нахождения решений

$$u_{i,0} = x_i^2 * (0,6 - x_i^2) + 100 * x = (i * h)^2 * (0,6 - (i * h)^2) + 50 * i = \\ = 0,04 * i * i * (0,6 - 0,04 * i * i) + 50 * i$$

где $i=0,1,2$ и $j=0$

$u_{0,j} = 0$, где $j=0,1,2,\dots,m-1$ и $i=0$, где m -номер самой последней верхней

точки рассматриваемого слоя.

$$u_{0,j} = t_j + 60 = j * k + 60, \text{ где } j=0,1,2,\dots,m-1 \text{ и } i=0,6$$

$$c\rho \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{k} = \lambda \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{ij+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}, \text{ откуда получим}$$

$$(c\rho h^2 + 2)u_{ij+1} - \lambda k u_{i-1,j+1} - \lambda k u_{i+1,j+1} = c\rho h^2 u_{ij} \quad (*), \text{ где } i=1,2 \text{ и } j=0,1,2,\dots,m-1$$

Формула (*) для нахождения значений в области, ограниченной прямыми $x=0$ и $x=0,6$; $t=0$.

Рассмотрим 1-ый способ.

Аппроксимируем $c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1), используя шаблон а), получаем:

$$c\rho \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{k} = \lambda \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{ij+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}, \text{ откуда}$$

$$u_{i+1,j} = (2 - c\rho h^2)u_{ij} + \frac{c\rho h^2}{\lambda k} u_{ij+1} - u_{i-1,j} \quad (2), \text{ где } i=4,5,\dots,8 \text{ и } j=0,1,2,\dots,m-1$$

Формула (2) для нахождения значений решений для всех точек, кроме последней.

Аппроксимируем (1), используя шаблон б)

$$c\rho \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{k} = \lambda \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{ij+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}, \text{ откуда}$$

$$u_{i+1,j+1} = (c\rho h^2 + 2)u_{ij+1} - \frac{c\rho h^2}{\lambda k} u_{ij} - u_{i-1,j+1} \quad (3)$$

Формула (3) для нахождения значения решений в последней точке.

Рассмотрим 2-ой способ.

Аналогично способу 1 аппроксимируем равенство (1). Формула (2) для нахождения значения решений в начальной точке ($i=4,5,\dots,8$ и $j=0$). Формула (3) для нахождения всех остальных точек ($i=4,5,\dots,8$ и $j=1,2,\dots,m-1$).

Мною была составлена программа на языке программирования TURBO PASCAL 7.0 для решения данной задачи. В программе представлены два способа решения.

```

program zad;uses crt;const l=0.92;      h=0.2;      k=0.01;      r=8.89;
c2=0.093;label a1;var i,m:integer;p,k1:real;procedure metod1(k1:real); var
u1,c,a,b,f,a1,b1:array[0..5] of real;  u2,u3,u:array[0..800] of real;  w,i,i2:real;
  i1,j,s,n,n1,f1,f2:integer;
begin
i:=0;s:=0;n:=1;
repeat
  u1[s]:=i*i*(0.36-i*i)+100*i;
  i:=i+h;s:=s+1;
until s=4;s:=s-1;writeln;
textcolor(4);write(0,' ');textcolor(2);gotoxy(6,10);
for i1:=0 to s do write(' ',u1[i1]:2:3);
j:=1;writeln;u2[0]:=u1[s-1];u3[0]:=u1[s];
repeat
u[0]:=0;u[s]:=j*k+60;
for i1:=1 to s-1 do
  begin
  c[i1]:=-(c2*r*h*h+2*l*k);f[i1]:=u1[i1]*h*h*c2*r;
  end;
  f[1]:=u1[1]*h*h*c2*r+l*k*u[0];
  f[s-1]:=u1[s-1]*h*h*c2*r+l*k*(j*k+60);
  for i1:=2 to s-1 do a[i1]:=-l*k;
  for i1:=1 to s-2 do b[i1]:=-l*k;
  a1[1]:=b[1]/c[1];b1[1]:=-f[1]/c[1];
  for i1:=2 to s-1 do
  begin
  a1[i1]:=b[i1]/(c[i1]-a[i1]*a1[i1-1]);
  b1[i1]:=(a[i1]*b1[i1-1]-f[i1])/(c[i1]-a[i1]*a1[i1-1]);
  end;
  u[s-1]:=b1[s-1];
  for i1:=s-2 downto 1 do u[i1]:=a1[i1]*u[i1+1]+b1[i1];
  u2[j]:=u[s-1];u3[j]:=u[s];
  j:=j+1;
  if j=k1*n then
  begin
  textcolor(4);write((j-1)*k:1:2,' ');textcolor(2);
  for i1:=0 to s do write(' ',u1[i1]:2:3);n:=n+1;writeln;
  end;
  for i1:=0 to s do u1[i1]:=u[i1];
  until j=m;
  i2:=0;textcolor(4);
  for i1:=0 to s do
  begin
  gotoxy(8+7*i1,21);write(i2:2:1);i2:=i2+h;
  end;
  readln;f1:=26;f2:=10;n1:=1;
  repeat
  j:=-1;n:=0;
  if i<=1.4 then f1:=f1-7*j else f1:=f1-8*j;
  u[m-1]:=((c2*r*h*h)/(l*k)+2)*u3[m-1]-(c2*r*h*h)/(l*k)*u3[m-2]-u2[m-1];

```

```

repeat
  j:=j+1;textcolor(2);
  u[ j ]:=(h*h*c2*r)/(l*k)*u3[j+1]+(2-(h*h*c2*r)/(l*k))*u3[ j ]-u2[ j ];
  if j=k1*n then begin
    gotoxy(f1,f2+n);write(' ',u[ j ]:2:3);n:=n+1;end;
    u2[ j ]:=u3[ j ];u3[ j ]:=u[ j ];
  until j=m-2;
  u2[m-1]:=u3[m-1];u3[m-1]:=u[m-1];
  gotoxy(f1,f2+n);write(' ',u[m-1]:2:3);n:=n+1;
  textcolor(4);
  if i<=1 then begin gotoxy(28+7*n1,f2+n);write(i:1:1);n1:=n1+1;end
    else begin gotoxy(26+8*n1,f2+n);write(i:1:1);n1:=n1+1;end;
  i:=i+h;readln;
until i>p+h;
end;
procedure metod2(k1:real);
var u1,c,a,b,f,a1,b1:array[0..5] of real;
    u2,u3,u:array[0..800] of real;
    w,i,i2:real;
    i1,j,s,n,f1,f2,n1:integer;
begin
  i:=0;s:=0;n:=1;
  repeat
    u1[s]:=i*i*(0.36-i*i)+100*i;
    i:=i+h;s:=s+1;
  until s=4;s:=s-1;
  textcolor(4);write(0,' ');textcolor(2);
  for i1:=0 to s do write(' ',u1[i1]:2:3);
  j:=1;writeln;u2[0]:=u1[s-1];u3[0]:=u1[s];
  repeat
    u[0]:=0;u[s]:=j*k+60;
    for i1:=1 to s-1 do
      begin
        c[i1]:=-(c2*r*h*h+2*l*k);f[i1]:=u1[i1]*h*h*c2*r;
      end;
    f[1]:=u1[1]*h*h*c2*r+l*k*u[0];
    f[s-1]:=u1[s-1]*h*h*c2*r+l*k*(j*k+60);
    for i1:=2 to s-1 do a[i1]:=-l*k;
    for i1:=1 to s-2 do b[i1]:=-l*k;
    a1[1]:=b[1]/c[1];b1[1]:=-f[1]/c[1];
    for i1:=2 to s-1 do
      begin
        a1[i1]:=b[i1]/(c[i1]-a[i1]*a1[i1-1]);
        b1[i1]:=(a[i1]*b1[i1-1]-f[i1])/(c[i1]-a[i1]*a1[i1-1]);
      end;
    u[s-1]:=b1[s-1];
    for i1:=s-2 downto 1 do u[i1]:=a1[i1]*u[i1+1]+b1[i1];
    u2[ j ]:=u[s-1];u3[ j ]:=u[s];
    j:=j+1;
  if j=k1*n then
    begin
      textcolor(4);write((j-1)*k:1:2,' ');textcolor(2);
      for i1:=0 to s do write(' ',u[i1]:2:3);n:=n+1;writeln;
    end;
  for i1:=0 to s do u1[i1]:=u[i1];

```

```

until j=m;
i2:=0;textcolor(4);
for i1:=0 to s do
begin
gotoxy(8+7*i1,25);write(i2:2:1);i2:=i2+h;
end;
readln;f1:=26;f2:=13;n1:=1;
repeat
j:=0;n:=0;
if i<=1.4 then f1:=f1+7*(j+1) else f1:=f1+8*(j+1);
u[ j ]:=(-(c2*r*h*h)/(l*k)+2)*u3[ j ]+(c2*r*h*h)/(l*k)*u3[j+1]-u2[ j ];
if j=k1*n then
begin textcolor(2);gotoxy(f1,f2+n);write(' ',u[0]:2:3);n:=n+1;end;
repeat
j:=j+1;textcolor(2);
u[ j ]:=(h*h*c2*r)/(l*k)*u3[j-1]+(2+(h*h*c2*r)/(l*k))*u3[ j ]-u2[ j ];
u2[j-1]:=u3[j-1];u3[j-1]:=u[j-1];
if j=k1*n then
begin gotoxy(f1,f2+n);write(' ',u[ j ]:2:3);n:=n+1;end;
until j=m-1;
gotoxy(f1,f2+n);write(' ',u[m-1]:2:3);n:=n+1;
u2[m-1]:=u3[m-1];u3[m-1]:=u[m-1];
textcolor(4);
if i<=1 then begin gotoxy(28+7*n1,f2+n);write(i:1:1);n1:=n1+1;end
else begin gotoxy(26+8*n1,f2+n);write(i:1:1);n1:=n1+1;end;
i:=i+h;readln;
until i>p+h;
end;
begin
clrscr; textcolor(5); writeln('Введите номер последнего слоя');
readln(m);k1:=m/10;
writeln('Введите номер последнего столбца, связанный с заданным шагом');
readln(p);metod1(k1);metod2(k1);
end.

```

Для наглядности сравнения полученных результатов приведем таблицу и графики решений.

1) Таблица решений(1-ый способ).

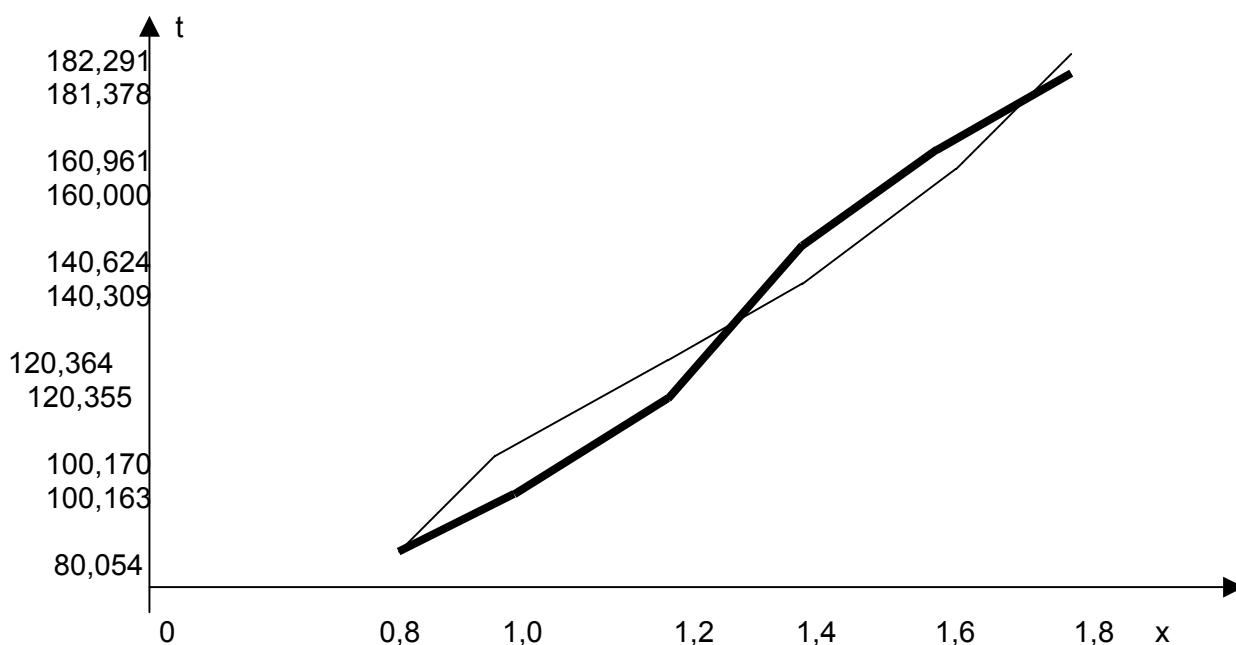
Слой	Значения на прямых по оси ох					
	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
1	80,054	100,163	120,355	140,624	160,961	181,378
30	80,443	100,640	120,904	141,236	161,653	182,165
50	80,709	100,965	121,304	141,703	162,185	182,764

2) Таблица решений(2-ой способ).

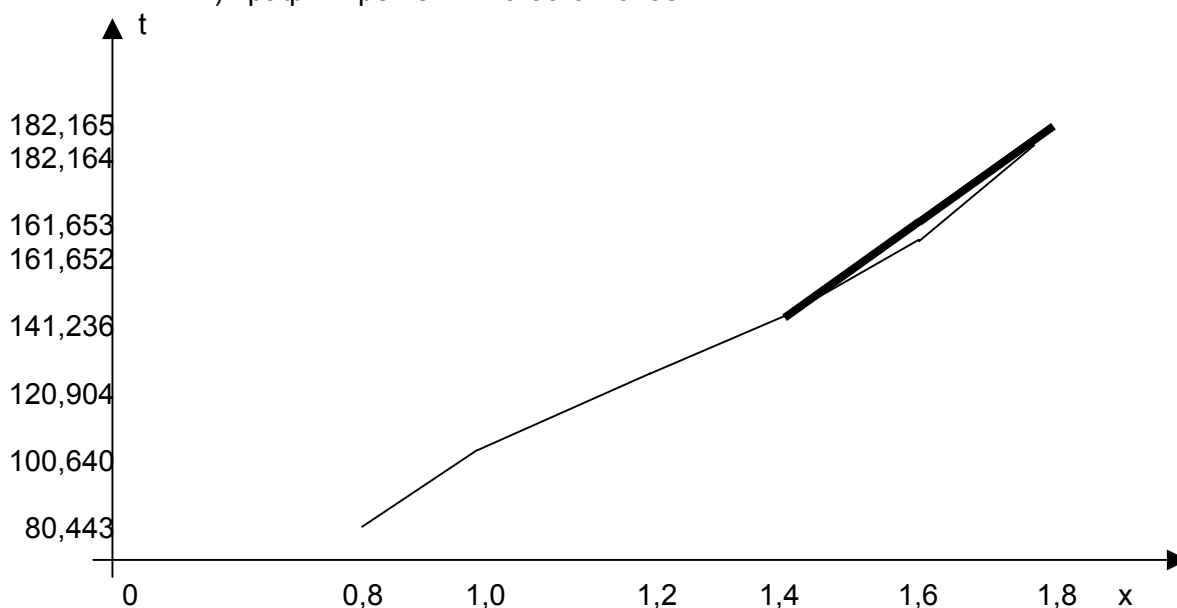
Слой	Значения на прямых по оси ox					
	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
1	80,054	100,170	120,364	140,309	158,000	182,291
30	80,443	100,640	120,904	141,236	161,652	182,164
50	80,709	100,965	121,304	141,703	162,185	182,764

Графики решений, полученных 1-ым способом (значения выделены жирной линией) и 2-ым способом.

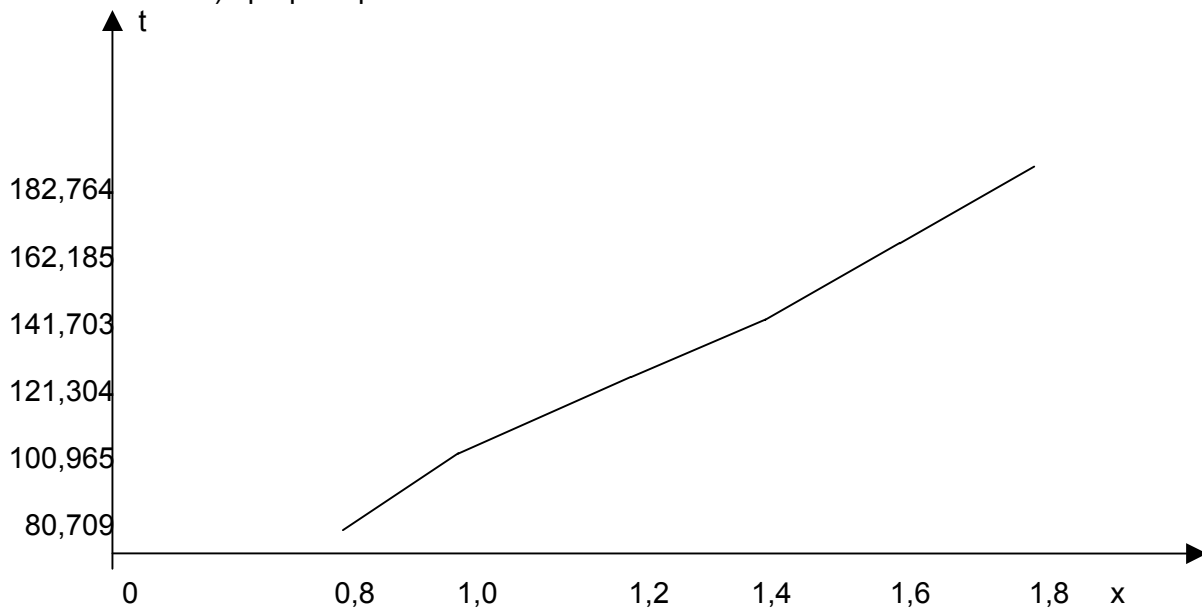
1) Графики решений на 1-ом слое.



2) Графики решений на 30-ом слое.



3) Графики решений на 100-ом слое.



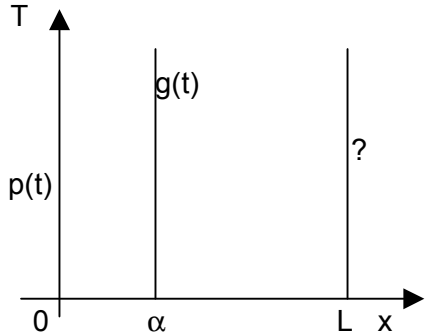
Используемая литература

1. А. Фридман "Уравнения с частными производными параболического типа", -изд. «Мир», -М, 1968 г.-427 с.
2. Ж.-Л. Лионс "Некоторые методы решения нелинейных краевых задач", -изд. «Мир», -М, -1972 г.-587 с.
3. О.М. Алифанов "Обратные задачи теплообмена", -изд. "Мир", -М, 1988 г.- 279 с
4. "Дифференциального уравнения с частными производными"(труды симпозиума, посвященного 60-летию академика Сергея Львовича Соболева), -изд. "Наука", -1970 г.-250 с.
5. А. А. Самарский " Введение в теорию разностных схем", -изд. "Наука", -М, 1971 г.-552 с.
6. Инженерно - физический журнал Том XXIX №1, А.Н. Тихонов " Обратные задачи теплопроводности", -1975г.
7. Инженерно - физический журнал Том XXIX №1, О.М. Алифанов " Граничные обратные задачи теплопроводности", -1975г.

8. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсеньев " Методы решения некорректно поставленных задач", -изд. "Наука", -М., 1974г.-224с.
9. О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев "Экспериментальные методы решения некорректных задач", -изд. "Наука", -М., 1988г.-274с.

Приложение

Примеры для самостоятельной работы по теме «Решения обратных задач теплопроводности».



Дана система:

$$\begin{cases} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in (0; \alpha) \cup (\alpha; L) \\ u(x, 0) = \varphi(x), x \in [0; \alpha] \\ u(0, t) = p(t) \\ u(\alpha, t) = g(t) \end{cases}$$

$u(L, t)$ = неизвестна

где $\varphi(x), p(t), g(t)$ – это функции определяющие значения решения на границах, а α – внутренняя точка, рассматриваемой области, α принадлежит оси OX.

Найти значения решения этой задачи в области $D = \{x \in (0; \alpha], t \in [0; +\infty)\}$

Шаг по оси OX: $h=0,2$ и по оси OT: $k=0,01$

В вариантах 1-3 область D – золотой стержень; в вариантах 4-6 область D – серебряный стержень; в вариантах 6-9 область D – бронзовый стержень; в вариантах 9-12 область D – железный стержень.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^2 \\ 1. \quad p(t) &= 5t \\ g(t) &= 7t - 0,64 \\ \alpha &= 0,8, \quad L(2,6;0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x + 7 \\ 2. \quad p(t) &= t^2 + 7 \\ g(t) &= 2t^2 + t + 7,4 \\ \alpha &= 0,4, \quad L(1;0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 - x^2 \\ 3. \quad p(t) &= 8t + 1 \\ g(t) &= t^2 + 0,64 \\ \alpha &= 0,6, \quad L(1,8;0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 5x^3 \\ 4. \quad p(t) &= 2t^2 \\ g(t) &= 5t + 2,56 \\ \alpha &= 0,8, \quad L(2;0) \end{aligned}$$

- $\varphi(x) = x(x^2 - 0,36)$
5. $p(t) = 5t$
 $g(t) = 7t$
 $\alpha = 0,6, L(1,2;0)$
- $\varphi(x) = x(0,64 - x^2)$
6. $p(t) = 0$
 $g(t) = t^2$
 $\alpha = 0,8, L(2,2;0)$
- $\varphi(x) = x^2 + 10x$
7. $p(t) = 6t$
 $g(t) = 5t + 8,64$
 $\alpha = 0,8, L(2,4;0)$
- $\varphi(x) = x^2 - 2$
8. $p(t) = t - 2$
 $g(t) = 6t - 1$
 $\alpha = 1, L(2,8;0)$
- $\varphi(x) = x^2$
9. $p(t) = 0$
 $g(t) = 2t^2 - 0,36$
 $\alpha = 0,6, L(1,8;0)$
- $\varphi(x) = x + 7$
10. $p(t) = 2t + 7$
 $g(t) = t^2 + 2t + 7,64$
 $\alpha = 0,8, L(1,8;0)$
- $\varphi(x) = 2 + x^2$
11. $p(t) = t^2 + 2$
 $g(t) = 2t + 3$
 $\alpha = 1, L(2;0)$
- $\varphi(x) = x^2(0,64 - x^2)$
12. $p(t) = 2t + t^3$
 $g(t) = t^2$
 $\alpha = 0,8, L(2,6;0)$