Сазонов Д.О.
E-mail: nimnul@vspu.ac.ru

Методические упражнения с решениями и теоремы с доказательством для курса средней школы «Функции и пределы»

1.1. Понятие точки сгущения

Дан числовой промежуток ($\sqrt{7}$; 12,4). Привести примеры числовых последовательностей, стремящихся к $\sqrt{7}$, члены которых принадлежат данному числовому промежутку. То же для 12.

1.2. Предел функции непрерывной переменной

1) Пользуясь определением предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=7; \quad -\infty < x < \infty$.

Для лучшего усвоения определения предела функции первое упражнение следует выполнить подробно по плану, вытекающему из этого определения, и составленному учениками под руководством учителя.

Вначале ученики выделяют несколько числовых последовательностей, принадлежащих области определения функции и стремящихся к 3 (желательно выделить возрастающую, убывающую и колеблющуюся), и находят пределы последовательностей соответствующих значений функций. Затем вопрос рассматривается в общем виде.

Пусть $\{x_n\}$— любая числовая последовательность, выделенная из промежутка — $-\infty < x < \infty$ и стремящаяся к 3. Тогда: lim x_n = lim ($2x_n$+1) = (по теореме о пределе суммы двух числовых последовательностей) lim ($2x_n$) + lim 1 = (по теореме о пределе произведения двух числовых последовательностей) lim 2 lim x_n+ 1= 2.3 + 1 = 7.

Замечание:

В дальнейшем при решении аналогичных примеров можно ограничиваться рассмотрением последовательностей значений функций лишь для общего вида последовательности значений аргумента

2) Найти: $\lim\limits_{x\to a} x^3$; $x\in(-\infty;\infty)$.

3) Найти: $\lim\limits_{x\to a} cx$, где с — постоянная величина.

После выполнения этого упражнения делается вывод: **постоянную величину можно выносить за знак предела.**

Необходимо ученикам показать случаи несуществования предела функции при приближении аргумента к одной из точек сгущения области определения функции.

4) Найти: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$; $-\infty<x<0$; $0<x<\infty$

Заметим, что точка 0 является точкой сгущения области определения данной функции, не принадлежащей ей.

Р е ш е н и е. Составим две числовые последовательности:

а) $\{x_n\}\to 0$, причем $x_n<0$; б) $\{x_n\}\to 0$, причем $x_n>0$**.**

Для всех $x_n<0$ имеем: $\frac{|x_n|}{x_n}=-1$. Следовательно, $\lim\frac{|x_n|}{x_n}=-1$.

Для всех $x_n>0$ имеем: . $\frac{|x_n|}{x_n}=1$ Следовательно, $\lim\frac{|x_n|}{x_n}=1$.

Таким образом, для различных последовательностей значений аргумента *x,* входящих в область определения функции $f(x)=\frac{|x|}{x}$ и стремящихся к 0, соответствующие последовательности значений функции имеют различные пределы.

В силу определения предела функции можно утверждать, что данная функция в точке $x=0$ предела не имеет.

Для лучше понимания следует дать геометрическое истолкование всех этапов аналитического решения, пользуясь графиком функции $y=\frac{|x|}{x}$ (черт. 1).

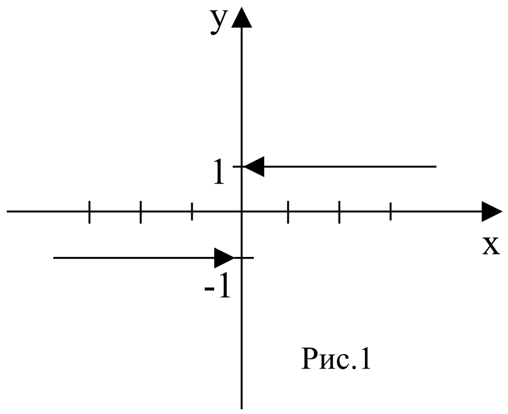


Рис.1

Далее стоит учащимся предложить вопросы: имеет ли функция $f(x)=\frac{|x|}{x}$ пределы в точках x = -1? x = π?

5) Дана функция $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{если } x \neq 0 \\ 2, & \text{если } x = 0 \end{cases}$

Найти предел этой функции при $x \to 0$ (черт. 2).

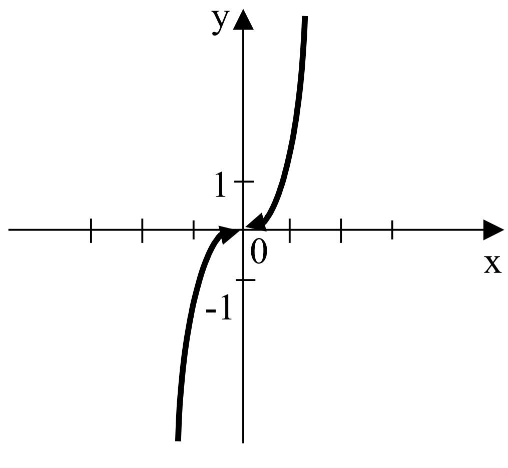


Рис.2

Решение. Для любой числовой последовательности $\{x_n\}$, выделенной из области определения данной функции и стремящейся к 0, при условии, что $x_n \neq 0$, имеем $\lim x_n^3 = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$.

Заметим, что в данном случае предел функции в точке x = О не совпадает с ее значением в этой точке, равным 2.

1.3. Бесконечно большие величины

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+c)=\infty$ (c—постоянная величина).

2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} xy=\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} xc=\infty$; $c\neq 0$. Знак символа, стоящего в правой части равенства, зависит от соотношения знаков величин x и c.

4) Доказать: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $x\neq 0$.

Доказательство.

В данном случае переменная x является непрерывной.

Чтобы доказать, что $l\ im_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0;$, выделим из области определения функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ произвольную последовательность $\{x_n\}$ $\to\infty$ и докажем, что $\lim\dfrac{1}{x_n}=0$. Для этого достаточно доказать, что, каким бы малым ни было задано положительное число ε, найдется такое значение x_n начиная с которого будет выполняться неравенство: $\left|0-\dfrac{1}{x_n}\right|<\varepsilon$ (*) или $x_n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ (**). Так как $x_n\to\infty$, то найдется такое значение x_n, начиная с которого все остальные члены последовательности $\{x_n\}$ будут превосходить число $\dfrac{1}{\varepsilon}$ (см. определение бесконечно большой величины). Из выполнимости неравенства (**) следует выполнимость неравенства (*), что означает: $\lim\dfrac{1}{x_n}=0$.

Итак, для любой последовательности $\{x_n\}$, выделенной из области определения данной функции $y=\dfrac{1}{x}$ и стремящейся к ∞, имеем: $\lim\dfrac{1}{x_n}=0$. Тогда по определению предела функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Приведенное доказательство можно выполнить, пользуясь символикой математической логики.

Доказательство.

Пусть D есть область определения функции $\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow (\forall\{x_n\}\to\infty)\ (x_n\in D)\ \left(\left\{\frac{1}{x_n}\right\}\to 0\right) \vee$$

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists x_n)(x_n\in D)\ \left(\left|0-\frac{1}{x_n}\right|<\varepsilon\right)\vee$$

$$\vee(\forall\varepsilon>0)\ (\exists x_n)(x_n\in D)\times\left(\frac{1}{x_n}<\varepsilon\right)\vee(\forall\varepsilon>0)\ (\exists x_n)(x_n\in D)$$

$\left(x_n>\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\Rightarrow u$ (истинно).

5) Доказать**:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$; ($x\neq 0$).

Доказательство. Из области определения функции $y=\dfrac{1}{x}$ выделим произвольную числовую последовательность $\{x_n\}\to 0$ и докажем, что $\lim\dfrac{1}{x_n}=\infty$. Для того чтобы доказать, что , $\lim\dfrac{1}{x_n}=\infty$, достаточно доказать, что переменная $\dfrac{1}{x_n}$, начиная с некоторого значения x_n, может превзойти любое сколь угодно большое положительное число A и в дальнейшем оставаться больше его. Решим неравенство $\dfrac{1}{x_n}>A;(1);\ x_n<\dfrac{1}{A}$ (2). Так как $x_n\to 0$, то найдется такое значение n, начиная с которого будет выполняться неравенство (2), а следовательно, и (1). Таким образом, переменная $\dfrac{1}{x_n}$ удовлетворяет определению бесконечно большой величины и поэтому $\lim\dfrac{1}{x_n}=\infty$. Тогда в силу определения предела функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

С помощью символов приведенное доказательство можно оформить так:

Пусть D есть область определения функции $\dfrac{1}{x}$. Тогда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty\Leftrightarrow(\forall\{x_n\}\to 0)\ (x_n\in D)\ \left(\left\{\frac{1}{x_n}\right\}\to\infty\right)\vee$$

$$\vee(\forall A>0)\ (\exists x_n)\ (x_n\in D)\ \left(\frac{1}{x_n}>A\right)\vee$$

$$\vee(\forall A>0)\,(\exists x_n)\,(x_n\in D)\left(x_n<\frac{1}{A}\right)\Rightarrow u.$$

Форму доказательства учитель выбирает, учитывая подготовленность своих учащихся.

1.4. Пределы суммы, произведения, частного

Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x+7)$.

Решение

Применяя теоремы о пределах суммы и произведения функций, найдем:

$$\lim_{x\to 1}(3x^4-5x+7)=\lim_{x\to 1}(3x^4)-\lim_{x\to 1}(5x)+\lim_{x\to 1}7=3(\lim_{x\to 1}x)^4-5\lim_{x\to 1}x+7=3\cdot 1^4-5\cdot 1+7=5$$

2) $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)(x^2-3x+2)$

3) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{3x-4}{x+5}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x-4}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

6) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$

7) $\lim\limits_{x\to \infty}mx$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{y}{b}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{c}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7x}{x-2}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{-x^3}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{-x^2}$

14) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+3x^2+8}{4x^3-7x+6}$

Решение

Теорему о пределе частного в данном случае применить нельзя, так как числитель и знаменатель конечного предела не имеют. Разделим числитель и знаменатель дроби на степень x с наивысшим показателем, из встречающихся в членах дроби. В результате этого преобразования величина дроби не изменится, а поэтому не изменится и ее предел.

Имеем: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x^2+8}{4x^3-7x+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{3}{x}+\dfrac{8}{x^3}}{4-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}}=\dfrac{5+0+0}{4-0+0}=\dfrac{5}{4}.$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-7}{x}$

16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+7x^2+4}{x^4+2x^3+3}$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$

Выполнение следующего, 19-го упражнения, связано с рассмотрением функции $y = [x]$*, которая называется функцией «антье от х» (французское слово Entier означает целый). Эта функция принимает для каждого числа x значение, равное наибольшему целому числу, не превосходящему x. Для того чтобы учащимся возникновение функции «антье от х» не казалось искусственным, предварительно познакомим их с другими, аналогичными ей функциями:

1) Плата за багаж при перевозке является функцией его веса.

Допустим, что за первую неполную и полную тонну взимается 20 коп. За каждую следующую полную и неполную тонну взимается 10 коп. Построить график, выражающий зависимость платы за багаж от его веса. (График представляет множество отрезков, параллельных оси OX, не имеющих левого конца).

2) На электрических часах минутная стрелка меняет мгновенно свое положение в конце каждой секунды. График зависимости показаний минутной стрелки от времени представляет собой множество отрезков, параллельных оси OX.

19) функция y = [x] выражает наибольшее целое число, не превосходящее число x. Доказать, что данная функция при $x \to 3$ не имеет предела.

Решение. Для того чтобы учащиеся лучше уяснили понятие функции $y = [x]$, предложим им найти [3,754]; [27]; [—2,64]. (Ответ: 3; 27; -3).

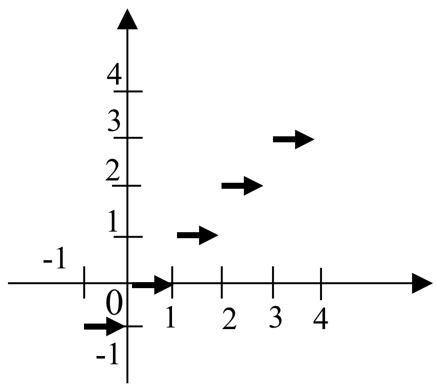
Построим график функции $y = [x]$ (черт. 3). При этом будем иметь в виду, что если

$-1 \le x < 0$, то $[x]=-1$

$0 \le x < 1$, то $[x]=0$

$1 \le x < 2$, то $[x]=1$

$2 \le x < 3$, то $[x]=2$ и т.д.



Черт.3

Таким образом, график функции $y = [x]$ состоит из бесконечного множества отрезков, параллельных оси *OX*, не имеющих правого конца. Отсутствие правого конца каждого отрезка показано соответствующей стрелкой. Например, часть графика данной функции, построенная на промежутке [*2,* 3), так же как и этот промежуток, не имеет правого конца. Точка, соответствующая $x = 3$, принадлежит части графика, построенного на промежутке [3; 4], и т. д.

Покажем, что при $x \to 3$ функция $y = [x]$ не имеет предела. Если $x \to 3$ и при этом $x \in [2; 3)$, то для этого промежутка функция $y = 2$ и поэтому $\lim\limits_{x \to 3} y = 2$.

Если $x \to 3$ и при этом $x \in [3; 4)$, то для этого промежутка $\lim\limits_{x \to 3} y = 3$. Таким образом, при $x \to 3$ функция $y = [x]$ не стремится к определенному пределу. Следовательно, при $x \to 3$ функция $y = [x]$ предела не имеет.

С целью обобщения ученикам можно предложить указать множество всех тех точек, в которых функция $y = \{x\}$ не имеет предела.

20) В плоскости *XOУ* дана точка *А* с координатами (2; 3). Построены прямые *AB* || *OX* и *AD* || *OУ* (черт. 19). На оси абсцисс

дана точка *M* так, что ее абсцисса $x \geq 2$. *F* — точка пересечения *BM* и *AD*. Точка *M* удаляется неограниченно вправо от точки *D,* скользя по прямой *OX*. Переменную длину *DF* обозначим через *z a* переменную *DM* через *v*. Доказать $\lim\limits_{v\to\infty} z = 3$.

Решение 1. Точка *M,* скользя по оси *OX,* неограниченно удаляется вправо от начала *O*. При этом переменная длина *z* отрезка *DF* является функцией непрерывного аргумента *v* — длины отрезка *DM,* стремящегося к ∞. Докажем, что $\lim\limits_{v\to\infty} z = 3$.

Представим, что точка *M,* бесконечно удаляясь от точки *D* вправо, не непрерывно скользит по оси абсцисс, а перемещается "скачками", последовательно занимая, на оси *OX* положения M_1, M_2, M_3,, ... , M_n, ... (см. черт. 19). Тогда длины v_1,, v_2,, v_3; ...; v_n ;... отрезков DM_1, DM_2, DM_3, ...; DM_n, ... составят числовую последовательность, стремящуюся к ∞. Вместе с этим длины отрезков DF_1, DF_2, DF_3 ..., DF_n, составят числовую последовательность: z_1; z_2 ; z_3; …z_n; …..

Покажем, что при $v_n \to \infty$ переменная Zn → 3, т. е., что, каким бы малым ни было взято положительное число ε, найдется значение v_n начиная с которого будет выполняться неравенство $3-z_n < \varepsilon$. Построим точку *F'* так, чтобы *AF'* = ε (см. черт. 19). Построим прямую *BF',* пересекающую ось *OX* в некоторой точке *M'* (точка *M'* на чертеже не обозначена). На прямой *OX* существует бесконечное множество точек из отмеченных нами и расположенных правее точки *M'*. Возьмем любую из них, например M_p (точка M_p на чертеже не обозначена). Тогда прямая BM_p пересечет прямую *AD* в точке *F'',* расположенной между точками *F'* и *A*. Это значит, что *AF''* < ε и поэтому *AD —DF''* < ε или 3 — z_p < е. Следовательно, $z_n \to 3$ при $v_n \to \infty$.

На оси *OX* можно было взять другую последовательность точек $M'_1, M'_2, M'_3, ... M'_n, ...$ при условии, что длины $v'_1, v'_2, v'_3, ..., v'_n, ...$ отрезков DM'_1, DM'_2, $DM'_3, ..., DM'_n, ...$ составляют неограниченную возрастающую последовательность. Вместе с этим получим другую последовательность значений непрерывно изменяющейся переменной z: $z'_1, z'_2, z'_3, ..., z'_n, ...$.

Аналогично предыдущему можно доказать, что и в этом случае lim z'_n = 3 при $v'_n \to \infty$.

Итак, какую бы мы ни взяли последовательность значений аргумента $v'_1; v'_2; v'_3; ...$, $v'_n; ...$стремящуюся к ∞, соответствующая последовательность значений функции $z'_1, z'_2, z'_3, ..., z'_n, ...$ имеет один и тот же предел, равный 3. Следовательно $\lim\limits_{v\to\infty} z = 3$.

Решение 2. Имеем: ΔABF подобен Δ DFM (черт. 19). Поэтому: $\frac{DF}{AF}=\frac{DM}{AB}$ или $\frac{z}{3-z}=\frac{v}{2}$; 2z=3v-vz; $z=\frac{3v}{2+v}$

$$\lim_{v\to\infty} z=\lim_{v\to\infty}\frac{3v}{2+v}=\lim_{v\to\infty}\frac{3}{\frac{2}{v}+1}=3.$$

После того как учащиеся IX класса получат достаточные сведения о тригонометрических функциях, рекомендуем им с целью повторения темы «Предел функции» выполнить следующие упражнения:

21) Доказать, что функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, определенная при всех действительных значениях *x,* кроме *x*=0*,* не имеет предела при $x\to 0$.

1.5. Непрерывность функции

1) Доказать, что функция f(x) = $2x$ + 3, заданная на промежутке $-\infty<x<\infty$, непрерывна в любой точке c.

Доказательство. Проверим выполнение условий, сформулированных в определении непрерывности функции.

1) Найдем предел функции f(x) при $x\to c$.

Из области определения функции выделим произвольную последовательность $\{x_n\}\to c$. Найдем: lim f(x_n) = lim (2x_n+3) = lim (2x_n) + lim3 =2c+3.

Так как $\{x_n\}$ есть произвольная последовательность, выделенная из области определения данной функции и стремящаяся к с, , то в силу определения предела функции имеем: $\lim\limits_{x\to c}(2x+3)=2c+3$.

2) Найдем значение функции f(x) в точке с. Имеем: f*(c)* = 2c + 3. Следовательно, limf(x)=f*(c).*

Вывод. **Функция *f(x)* = *2x* + *3* непрерывна в любой точке области ее определения.**

2) Доказать, что функция f(x)=$\frac{|x|}{x}$ непрерывна в любой точке промежутка

$-\infty<x<\infty$

3) Доказать, что функция f(x) = $2x^2+7$ непрерывна в промежутке (—7; —1).

4) Дана функция: $y=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\le 2 \\ x & \text{при } x>2. \end{cases}$

Можно ли утверждать, что данная функция непрерывна во всей области определения? Ответ обосновать.

Рекомендуется вначале построить график данной функции (черт. 23). Выводы, сделанные на основании графических наблюдений, следует подтвердить аналитическим доказательством. Доказать, что в точке *x = 2* данная функция предела не имеет).

5) Можно ли утверждать, что функция $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \le 2 \\ 4 & \text{при } x > 2. \end{cases}$

заданная на промежутке (-∞; +∞) непрерывна во всей области определения? (Рекомендуется предварительно построить график данной функции).

Обращается внимание учащихся на то, что доказательство непрерывности функции в точке с, принадлежащей области определения функции, сводится к доказательству существования предела функции в точке с, равного ее значению в этой точке.

Тригонометрические теоремы сложения, необходимые для доказательства непрерывности тригонометрических функций, изучаются в X классе. Поэтому сведения о непрерывности тригонометрических функций в курсе IX класса сообщаются без доказательства.

Упражнения. 1) Найти: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+3x+7}{x+5}$.

Решение. Дробь $\dfrac{2x^2+3x+7}{x+5}$ непрерывна для всех значений *x,* кроме x = -5. Следовательно, в точке x=1 данная функция непрерывна. Напомним: чтобы найти предел функции, непрерывной в точке а при $x \to a$, достаточно в аналитическое выражение этой функции подставить вместо x число a. Поэтому:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+3x+7}{x+5}=\frac{2\cdot1^2+3\cdot1+7}{1+5}=2$$

2) Найти: $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2-x-6}{x-2}$

3) Найти: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-x-6}{x-2}$

Доказательство. Из области определения функции $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ выделим две числовые последовательности, стремящиеся. к 0.

1) $\frac{1}{\pi};\frac{1}{2\pi};\frac{1}{3\pi};...;\frac{1}{n\pi};...$

Общий член этой последовательности $x_n=\frac{1}{n\pi}$; lim x_n=0.

Последовательность соответствующих значений функции имеет вид:

$$\sin\frac{1}{\frac{1}{\pi}};\sin\frac{1}{\frac{1}{2\pi}};\sin\frac{1}{\frac{1}{3\pi}};...;\sin\frac{1}{\frac{1}{n\pi}};...(*)$$

или 0; 0; 0; . . .; 0; .... Следовательно, lim f(x_n)=0.

2) $\frac{2}{\pi};\frac{2}{5\pi};\frac{2}{9\pi};...;\frac{2}{(4n-3)\pi};...$

Общий член этой последовательности $x'_n=\frac{2}{(4n-3)\pi}$; $\lim x'_n=0$.

Последовательность соответствующих значений функции:

$$\sin\frac{\pi}{2};\ \sin\frac{5\pi}{2};\ \sin\frac{9\pi}{2};\ \dots;\ \sin\frac{(4n-3)\pi}{2};\ \dots\ (**)$$

или 1; 1; 1; . . .; 1.; . . . . Следовательно, $\lim f(x'_n)=1$.

Так как последовательности (*) и (**) имеют различные пределы, то функция $\sin\frac{1}{x}$ при $x\to 0$ предела не имеет.

22) Доказать, что функция f(x)= sin x при $x\to\infty$ предела не имеет.

Доказательство. Рассмотрим две числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$, выделенные из области определения функции f(x)= sin x и стремящиеся к ∞.

1) $x_n=\pi n$; $\lim x_n=\lim \pi n=\infty$. Имеем: sin x_n=sin πn=0 при всех n. Следовательно,

lim sin x_n = 0.

2) $x'_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\lim x'_n=\lim(\frac{\pi}{2}+2\pi n)=\infty$; $\sin x'_n=\sin(\frac{\pi}{2}+2\pi n)=1$ при всех n. Следовательно, $\lim\sin x'_n=1$.

Таким образом, пределы, последовательностей sin x_n и $\sin x'_n$ различны. Следовательно, при $x\to\infty$ функция sin x: предела не имеет.