Сазонов Д.О.
E-mail: nimnul@vspu.ac.ru

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ В КУРСЕ ШКОЛЫ

1.1. Понятие функции. Свойство плотности множества действительных чисел. Числовые промежутки

Прежде чем приступить к изучению предела сначала нашим основным объектом ДАЛЬНЕЙШЕГО изучения будут являться функции. Поэтому предварительно повторим отдельные сведения по теме «Функциональная зависимость».

Определение функции. *Величина у называется функцией переменной величины х, заданной на множестве X, если по некоторому правилу каждому значению х (из множества X) поставлено в соответствие единственное значение величины у.*

{ ***для сравнения можно привести определение из матанализа****:*
Определение: *Пусть даны два множества X и У. Если каждому элементу $x \in X$ сопоставлен по определенному правилу некоторый элемент $y \in У$, то говорят, что на множестве X определена функция f и пишут $f{:}X \to У$ или $x \to (f(x) \mid x \in X)$ }*

Это определение содержит два важных положения:

1) Значения аргумента принадлежат определенному множеству. Это множество называется областью допустимых значений аргумента или областью определения функции.

2) Существует правило, по которому каждому элементу x множества X в соответствие ставится единственный элемент y множества Y.

Если функция задана с помощью формулы, то часто не указывают область ее определения. За область определения функции в этом случае принимают все те значения аргумента, при которых она имеет смысл.

Например. Найти область определения функций:

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

<u>Решение</u>

$\dfrac{x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow ((x \geq 0) \wedge (x-1) > 0 \vee \quad ((x \leq 0) \wedge (x-1) < 0) \Leftrightarrow \quad ((x \geq 0) \wedge (x > 1)) \vee$
$((x \leq 0) \wedge (x < 1)) \Leftrightarrow (x > 1) \vee (x \leq 0)$.

2) $f(x)=\sqrt{-x^2+x+6}$

Решение

$-x^2+x+6\geq 0 \Leftrightarrow (3-x)(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow ((3-x)\geq 0 \wedge (x+2)\geq 0) \vee (3\text{-}x)\leq 0 \wedge$
$\wedge\ (x+2)\leq 0 \Leftrightarrow ((x\leq 3)\wedge(x\geq -2))\vee((x\geq 3)\wedge(x\leq -2))\Rightarrow(-2\leq x\leq 3)$.

Понятие функции тесно связано с понятиями: множество, соответствие, число, числовые промежутки. Для более успешного изучения последующего материала рассмотрим некоторые из этих понятий.

1) Понятие множества. Ученики должны знать, что существуют понятия, которые являются первоначальными и принимаются без определений. К числу таких понятий относится понятие **множества**. Синонимами слова множество являются: совокупность, комплекс, собрание и др. Отдельные предметы, входящие в состав множества, называются его элементами. Обычно множества обозначают заглавными латинскими буквами: *А, В, С, ..., X,* У, ..., а элементы множества малыми буквами: *а, Ь, с, ..., х, у, ...* Тот факт, что элемент *а* принадлежит множеству *А,* обозначают так: $a \in A$. Если элемент *а* не принадлежит множеству *А*, то пишут: $a \notin A$.

Множества бывают **конечные** и **бесконечные.** Бесконечными множествами являются, например, множества натуральных, рациональных, действительных чисел. Множества точек прямой или какого-либо ее отрезка бесконечны. Множество *М,* состоящее из элементов 1, 4, 0, $-\frac{3}{4}$ конечно. Множество песчинок, содержащихся в пространстве, занимаемом Землей, конечно. Мы не можем указать точное число этих песчинок, однако можем указать такое число, которое наверняка превосходит его.

Рассматривают также множества, состоящие из одного элемента, и множества, не содержащие элементов. Например, множество корней уравнения $x + 3 = 0$ состоит из одного элемента. Множества, не содержащие ни одного элемента, называются пустыми. Пустое множество принято обозначать нулем или символом $\varnothing$. Запись $A = \varnothing$ означает, что множество А - пустое. Множество корней уравнения $x^2 + 1 = 0$ является примером пустого множества.

Множество А, состоящее, например, из элементов a, b*, с, т,* обозначают следующим образом: $A = \{a, b, c, m\}$. Аналогичным образом обозначаются бесконечные множества. Например, множество натуральных чисел обозначают так: $N == \{1, 2, 3, .., n, ...\}$ или $N = \{n\}$, где под *n* понимают множество всех чисел натурального ряда. .Выражение $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ есть обозначение множества всех членов числовой последовательности с общим членом $a_n=\frac{n+1}{n}$, *где n* — переменная, принимающая значения всех чисел натурального ряда.

II. Действительные числа являются основной базой развития учения о функциях. В связи с этим рассмотрим весьма важное для дальнейшего изложения свойство **плотности множества** действительных чисел: между любыми двумя действительными числами существует бесконечное множество действительных чисел, т.е. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x<z<y)$.

Чтобы это доказать, сначала возьмем два рациональных числа, например 1,6 и 4. Между этими двумя рациональными числами существует бесконечное множество других рациональных чисел. Например между числами 1,6 и 4 существует число, равное их среднему арифметическому: $\frac{1{,}6+4}{2}=2{,}8$. Среднее арифметическое чисел 1,6 и 4 заключено между ними: 1,6 < 2,8 < 4 (рис. 1).

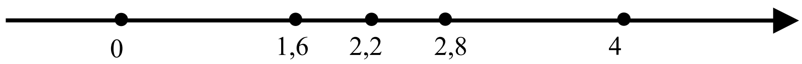

Рис. 1

Между числами 1,6 и 2,8 существует число, равное их среднему арифметическому: $\frac{2{,}8+1{,}6}{2}=2{,}2$. Имеем: 1,6 <2,2 <2,8,и следовательно, 1,6 < 2,2 < 4.

Этот процесс отыскания чисел, заключенных между числами 1,6 и 4, можно продолжать бесконечно. Так мы приходим к выводу, что между числами 1,6 и 4 существует бесконечное множество чисел.

Это утверждение справедливо для любых двух рациональных чисел *a* и *b* (*a*<b) Действительно:

$$\left.\begin{array}{l}(\forall a \forall b \wedge (a<b)) \Rightarrow 2a<a+b \Rightarrow a<\dfrac{a+b}{2} \\ (\forall a \forall b \wedge (a<b)) \Rightarrow a+b<2b \Rightarrow \dfrac{a+b}{2}<b\end{array}\right\} \Rightarrow a<\frac{a+b}{2}<b .$$

Таким образом, между числами *a* и *b* существует число, равное их среднему арифметическому. Затем можно показать, что существует число, также заключенное между числами *a* и *b* и равное, например, среднему арифметическому чисел *a* и $\frac{a+b}{2}$. Процесс, приводящий к отысканию новых чисел, промежуточных между *a* и *b*, можно продолжать неограниченно. Это дает основание утверждать, что между двумя рациональными числами существует бесконечное множество рациональных чисел.

Таким же образом можно показать, что между любыми двумя действительными числами существует бесконечное множество чисел, лежащих между ними. Указанное свойство рациональных и действительных чисел называется свойством плотности этих числовых множеств. Можно предложить учащимся вопрос: обладает ли свойством плотности множество натуральных чисел?

Свойством плотности обладает множество точек прямой линии. Между любыми двумя точками прямой существует бесконечное множество точек этой прямой. Подобно тому как нельзя указать два соседних действительных числа, нельзя указать две соседние точки прямой. Прямую нельзя представлять составленной из точек так же, как можно составить ряд из примыкающих друг к другу горошин. В этом ряду есть соседние элементы, и число их на ограниченной части ряда конечно. Между тем число точек на отрезке любой длины бесконечно. Свойство плотности прямой нельзя представить наглядно. Оно может быть осмыслено только логически.

III. Числовые промежутки. Областью определения функции обычно являются числовые промежутки, конечные или бесконечные.

1) *Конечные числовые промежутки.* Конечный промежуток ограничен двумя действительными числами a и b *{a <b),* которые называются его концами. Промежуток может включать в себя концы, а может их не включать. В связи с этим различают:

а) Замкнутый промежуток — множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$. Такой промежуток обозначают через [a, b] и называют отрезком. Например, множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $3 \le x \le 5$, обозначают так: [3; 5]. Наименьшее число этого промежутка равно 3 и наибольшее 5.

Геометрически отрезок [a, b] изображают отрезком прямой линии с концами в точках a и b (рис.2).

б) Полуоткрытый промежуток— множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x < b$ или $a < x \le b$. Эти промежутки обозначают соответственно $[a, b)$ и $(a, b]$. Например, множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $2<x\le4,5$, обозначают так: (2; 4,5].

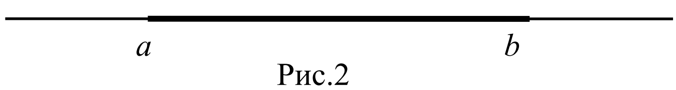

Рис.2

Этот промежуток имеет наибольшее число 4,5 и не имеет наименьшего. Действительно, промежуток (2; 4,5] не содержит числа 2, но содержит любое число x такое, что

$2 < x \le 4,5$. Допустим, что данный промежуток имеет наименьшее число

$a \in (2; 4,5]$. Тогда $2 < a < 4,5$, где множество $(2; a) = \varnothing$. В силу плотности множества действительных чисел между числами 2 и а существует

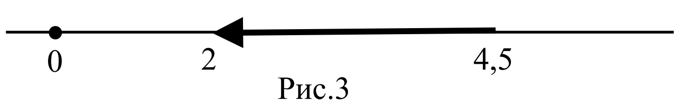

Рис.3

бесконечное множество действительных чисел, заключенных между ними. Таким образом, существует бесконечное множество других чисел, меньших а и принадлежащих данному множеству.

Следовательно, промежуток (2; 2,5] не имеет наименьшего числа. Геометрически полуоткрытый промежуток изображают

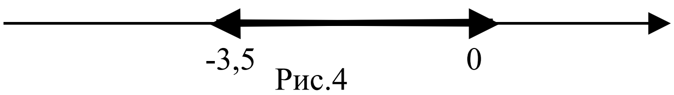

Рис.4

в виде отрезка (рис. 3). Стрелка указывает на то, что число 2 данному промежутку не принадлежит.

в) Открытый промежуток — множество всех действительных чисел *x,* удовлетворяющих неравенству $a < x < b$ (открытый промежуток также называют интервалом). Открытый промежуток обозначают через (а, *b).* Например, множество всех чисел *x,* удовлетворяющих неравенству $-3,5 < x < 0$, запишем так: (-3,5; 0). Этот промежуток не имеет ни наименьшего, ни наибольшего числа. Геометрически открытый промежуток обозначают в виде отрезка со стрелками на концах (рис. 4).

2) *Бесконечные числовые промежутки.*

а) Промежуток, состоящий из множества всех действительных чисел, обозначают так: $(-\infty;\infty)$. Этот промежуток не имеет ни наименьшего, ни наибольшего чисел.

б) Промежуток всех действительных чисел *x,* удовлетворяющих неравенству $x > a$, обозначают через (a, ∞). Например, множество всех чисел *x,* удовлетворяющих неравенству $x > 1$, можно записать так: $(1; \infty)$. Этот промежуток не имеет ни наименьшего, ни наибольшего чисел.

в) Промежуток всех действительных чисел *x*, удовлетворяющих неравенству $x \geq a$, обозначают так: $[a; \infty)$

1.2. Понятие точки сгущения множества

Предварительно надо дать определение понятия окрестности точки.

Пусть ε — любое положительное число и *a* — некоторое действительное число. Тогда множество всех действительных чисел *x,* удовлетворяющих неравенствам $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, называется окрестностью точки *a.* Окрестность точки *a* может быть также

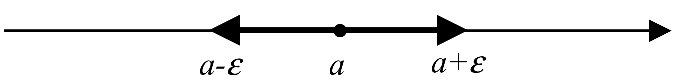

Рис.5

определена как множество всех действительных чисел *x,* удовлетворяющих неравенству $|x — a|<ε$. Таким образом, окрестностью точки *a* называется любой интервал $(a — ε;\ a + ε)$, имеющий эту точку своей серединой. Точка *a* называется центром этой окрестности, число ε — ее радиусом (рис. 5).

Так же понятие окрестности точки можно графически представить как окружность с центром в точке а, и радиусом а+ε (рис. 5а):

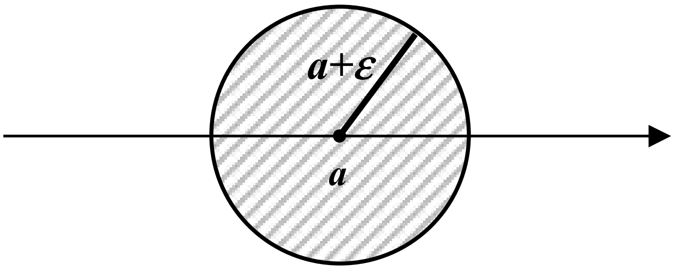

Рис.5(а)

Рассмотрим знакомый учащимся пример числовой последовательности $x_n = \frac{n}{n+1}$. Найдем несколько ее первых членов и отметим их на числовой оси: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{2}{3}$; $x_3 = \frac{3}{4}$; …(рис. 6).

Было установлено, что $\lim \frac{n}{n+1} = 1$. Это значит, что, каким бы малым ни было задано положительное число ε, найдется такой номер *N,* что все члены последовательности, начиная с $n > N$, окажутся в окрестности

(1 — ε; 1 + ε) точки 1 (см. рис. 6). Символически такое утверждение будет выглядеть так: $\lim x_n=1 \Leftrightarrow (\forall ε>0)\ (\exists\ N(ε)\ (\forall n>N)\ (x_n \in (1 - ε;\ 1 + ε))$ или

$$\lim x_n=1 \Leftrightarrow (\forall ε>0)\ (\exists\ N(ε))\ (\forall n>N)\ (|1-x_n|<ε).$$

Так, например, если ε = 0,0001, то в окрестности (0,9999; 1,0001) точки 1 находятся все члены числовой последовательности, начиная с десятитысячного. Действительно, $a_{10000} = \frac{10000}{10001}$. Тогда:

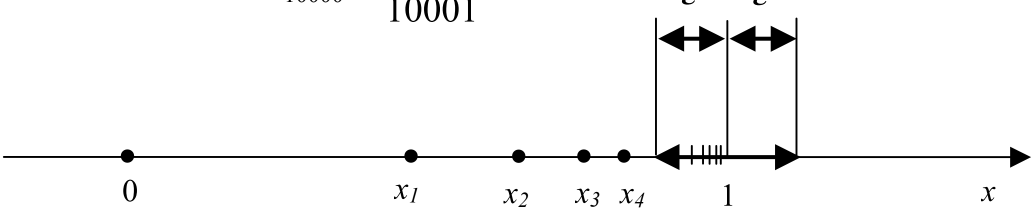

Рис. 6

$1-\frac{10000}{10001}<0{,}0001$. Так как данная последовательность возрастающая, то все члены ее, следующие за десятитысячным, и подавно будут отличаться от 1 меньше чем на 0,0001, а поэтому окажутся в окрестности (0,9999; 1,0001) точки 1.

Таким образом, в любой окрестности точки 1 содержатся числа числового множества $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ Точка 1 называется **точкой сгущения** (предельной точкой) данного числового множества.

Определение. **Пусть дано числовое множество *X*. Точка *a* называется точкой сгущения (предельной точкой) этого множества, если в любой окрестности (*a* — ε; *a* + ε) этой точки содержатся значения *x* из множества *X*, отличные от *a*.**

{ Для сравнение также стоти привести «нестандартное определение» предельной точки по Робинсону.

Определение. **Стандартное число** a **называется предельной точкой последовательности** $\mathrm{x_n}$**, если некоторые бесконечно далёкие члены последовательности бесконечно близки к** a**, т.е. существует такое нестандартное гипернатуральное число** m**, что разность** $\mathrm{x_m - a}$ **бесконечно мала. }**

Приведем символическую запись этого определения: точка *a*— точка сгущения числового множества *X* •⇔ (∀ε>0) (∃*x*) (*x*∈*X*) (*x*≠a) (*x*∈(a-ε; a+ε)). В рассмотренном примере точка сгущения не принадлежала множеству *X*. Действительно, число $1\in\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, так как при любом *n* имеем $\frac{n}{n+1}<1$. Возможен другой случай. Пусть дан промежуток (4; 6]. Этому промежутку принадлежит число 5. В любой окрестности этой точки содержатся точки, принадлежащие этому промежутку. Действительно, пусть ε любое положительное число. Тогда в силу плотности множества действительных чисел в окрестности (5 — ε;5 + ε) содержится бесконечное множество чисел, отличных от 5 и принадлежащих множеству (4; 6] (Рис. 7).

Таким образом, точка 5 является точкой сгущения этого числового множества. Все точки данного промежутка — точки

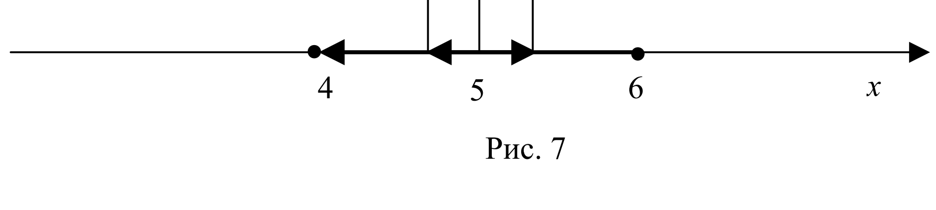

Рис. 7

сгущения данного множества. Кроме того, точка 4 — точка сгущения этого числового множества, не принадлежащая ему; точка 6 — точка сгущения, принадлежащая данному числовому множеству.

Итак, пусть дан какой-либо числовой промежуток с концами a и b. Тогда все числа этого промежутка являются точками сгущения данного числового множества. Точки a и b также являются точками сгущения этого числового множества, независимо от того, принадлежат они ему или нет.

Множество $\{n\}$ натуральных чисел точек *сгущения не имеет*. Докажем это. Пусть *a* есть некоторое натуральное число. Возьмем $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. Тогда в окрестности (а — ε; *a* + ε) точки *a* не содержится ни одной точки множества $\{n\}$, кроме самой точки *a* (рис. 8).

Рассмотрим одно из свойств точек сгущения, весьма важное для последующего изложения. **На этом свойстве будет основано введение понятия предела функции.**

Пусть дано числовое множество (3; 6]. Возьмем произвольную точку сгущения этого числового множества, например 4. Очевидно, что из этого числового множества можно выделить числовую последовательность, стремящуюся к 4. Например, все члены числовой последовательности, с общим членом $x_n = 4-\left(\frac{1}{2}\right)^n$*, стремящейся к 4, принадлежат данному числовому множеству.*

Можно выделить бесконечное множество последовательностей, стремящихся к 4, члены которых принадлежат данному числовому промежутку. Существование бесконечного множества числовых последовательностей, выделенных из промежутка (3; 6] и стремящихся к 4, можно показать на примере бесконечного множества числовых последовательностей вида $\left\{4-\frac{1}{kn}\right\}$ (*), где k — любое фиксированное действительное число, неравное нулю. Учащимся можно предложить указать несколько числовых последовательностей вида (*) при определенных значениях k (например, k =0,5;—7; $\sqrt{15}$ и др.). Кроме того, учащиеся должны привести примеры числовых последовательностей и другого вида.

Составление числовых последовательностей, стремящихся к а, члены которых принадлежат данному числовому множеству *A*, не должно затруднить учащихся. Они должны быстро улавлить мысль о том, что требуемому условию удовлетворяет любая числовая последовательность с общим членом $a_n=a+\alpha_n$, где α_n — общий член любой числовой последовательности, стремящейся к 0 при условии, что при любом n имеем $(a+\alpha_n)\in A$.

Возможные варианты числовых последовательностей, стремящихся к *a:*

1) $a_n = a + \frac{b}{n}$, где b фиксированное действительное число, например —3; 1; $-\sqrt{7}$.

2) $a_n = a + \frac{b}{c^n}$, где b и c — любые фиксированные действительные числа, причем $|c| > 1$.

1.3. Понятие непрерывной переменной

Вначале мы должны напомнить учащимся о том, что общий член x_n числовой последовательности рассматривается как переменная, принимающая значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$. С этой точки зрения, например, общий член последовательности $x_n = 1 + \frac{2}{n}$ есть переменная, принимающая значения: 3; 2; $1\frac{1}{3}$; …. Переменная x_nизменяется «скачками», принимая указанные значения. Также учащимся нужно напомнить, что графически члены числовой последовательности можно представить в виде бесконечного множества изолированных друг от друга точек.

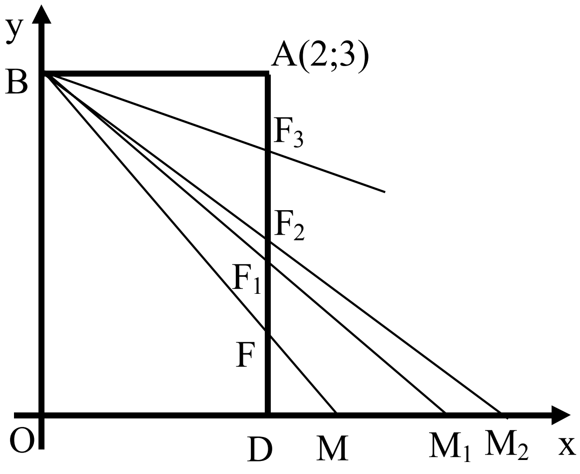

Рис.9

Введем понятие переменной, которая может принимать любые значения из данного промежутка множества действительных чисел. Это можно сделать, используя следующий пример.

В плоскости *XOУ* возьмем точку *A с* координатами (2; 3) и проведем прямые AB || *OX* и *AD* || *OУ* (рис. 9); тогда: *OD* = 2; *AD* = 3. На оси *OX* возьмем точку *M* так, что ее абсцисса $x \geq 2$. Точку пересечения *BM* и *AD* обозначим через *F*. Пусть точка *M,* вначале совпадавшая с точкой *D,* неограниченно удаляется вправо от точки *D,* скользя по прямой *OX.* Тогда длина ***Z,*** отрезка

DF будет увеличиваться от 0 до 3, не принимая значения, равного 3. Действительно, если *DF*=3, то *BF* || *OX,* и тогда точка *M* не существует.

Переменная длина отрезка *DF,* которую обозначили через *Z***,** может принимать любые значения из промежутка [0; 3): целые, дробные, иррациональные. Переменная называется непрерывной, если она может принимать любые действительные значения из данного промежутка.

Значения, принимаемые переменной *Z*, можно представить как множество ординат точки, непрерывно перемещающейся по оси *ОУ* от точки *О* до точки *В,* исключая точку *В*. Аналогичен характер изменения длины *и* отрезка *BF.* Переменная *и* принимает любые значения из промежутка (2; $\sqrt{13}$] и, следовательно, также является непрерывной.

1.4. Предел функции непрерывной переменной

Из курса 10 класса учащимся известно понятие предела числовой последовательности. В теме «Предел функции. Непрерывность. Производная» учащиеся должны познакомиться с понятием предела функции, аргумент которой может принимать любые действительные значения из данного промежутка. Это понятие отлично от знакомого учащимся предела числовой последовательности и нуждается в специальном изучении. Существуют два эквивалентных определения предела функции:

Определение 1: **Число *А* называется пределом функции *f(x)* при *x*, стремящемся к *a* (или в точке *a*), если для любого наперед заданного положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех значений *x,* входящих в область определения функции, отличных от *a* и удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.**

Это определение принято называть определением на языке «ε — δ» (Эпсилон – Дельта), принадлежит оно Коши.

Определение 2: Если **для любой последовательности значений *x*: x_1, x_2, x_3, … , x_n, …,входящих в область определения функции и сходящихся к *a*, но отличных от *a,* соответствующая последовательность значений функции *f(x)* $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, … ,$f(x_n)$ … , сходится и притом всегда к одному и тому же пределу *A*, то говорят, что функция *f(x)* стремится к *A* при *x,* стремящемся к *a*, а число *A* называют пределом функции *f(x)* в точке *a* или ее предельным значением в этой точке.**

Последнее определение называется определением предела функции «на языке последовательностей». Оно принадлежит Гейне.

Более доступным для учащихся считается определение предела функции «на языке последовательностей». Пользуясь определением предела функции «на языке последовательностей», мы опираемся на знания, полученные учащимися при изучении темы «Предел числовой последовательности». Материал, изученный по этой теме, трудно усваивается и, несомненно, нуждается в повторении и углублении[1]

Замечание: по стандартам на изучение этой темы в школе выделяется 20 часов.

На основании определения предела функции «на языке последовательностей» просто доказываются теоремы о пределах суммы, произведения и частного функций. Важно, что с помощью определения предела функции «на языке последовательностей» просто доказывается несуществование предела функции, так как для этого достаточно привести одну последовательность значений аргумента, для которой соответствующая последовательность значений функции не имеет предела.

Нужно заметить, что в определении понятия предела функций «на языке последовательностей» трудным моментом для учащихся может стать понятие «любой последовательности». Для усвоения этого понятия можно предложить учащимся соответствующие вычислительные и графические упражнения.

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос о поведении функции при стремлении ее аргумента к точке сгущения, принадлежащей области определения функции, или к ∞. Этот вопрос частично был рассмотрен раньше. Действительно, числовая последовательность есть функция натурального аргумента n. Мы находили пределы числовых последовательностей при $n \to \infty$. Так, например, было установлено, что $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim (1 + \frac{1}{10^n}) = 1$ и т. д. Теперь рассмотрим этот вопрос в более широком плане: поведение функции при непрерывном изменении аргумента. Вначале выясним характер изменения функции при стремлении непрерывно изменяющегося аргумента к точке сгущения, принадлежащей области определения функции. Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных примеров, наметим в общих чертах план изучения данного вопроса.

Пусть областью определения данной функции $f(x)$ является промежуток (а, b) и точка c есть точка сгущения этого числового множества. Тогда из данного промежутка можно выделить бесконечное множество числовых последовательностей, стремящихся к c.

Например:

1) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ —возрастающая последовательность (рис. 10).

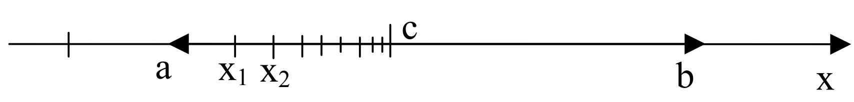

Рис. 10

[1] Взято из ссылок с математического образовательного сайта www.exponenta.ru

2) $x'_1, x'_2, x'_3, ..., x'_n, ...$ - колеблющаяся последовательность (рис. 11).

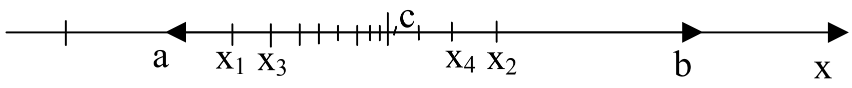

Рис. 11

3) $x''_1, x''_2, x''_3, ..., x''_n, ...$ - убывающая последовательность (рис. 12).

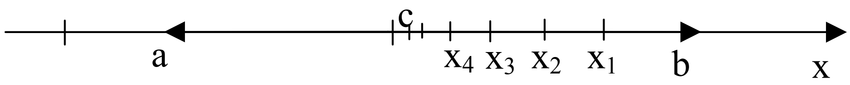

Рис. 12

Для каждой такой последовательности значений аргумента можно составить числовую последовательность соответствующих значений функции, подставляя в выражение *f(x)* вместо *x* поочередно все ее члены.

Выполним это для трех составленных последовательностей значений аргумента и построим графики образовавшихся последовательностей значений функции.

1) $f(x_1), f(x_2,), f(x_3,), ... ,f(x_n,) ...$, (рис. 13)

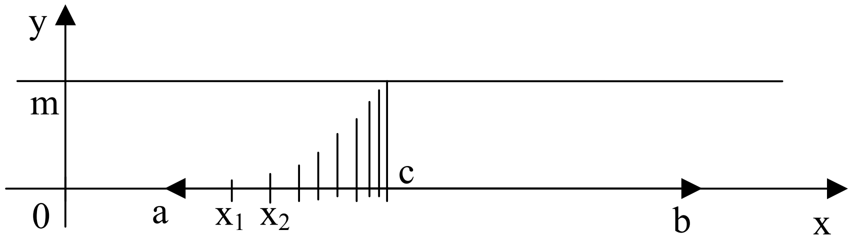

Рис. 13

2) $f(x'_1); f(x'_2); f(x'_3); ... f(x'_n); ...$ (рис. 14)

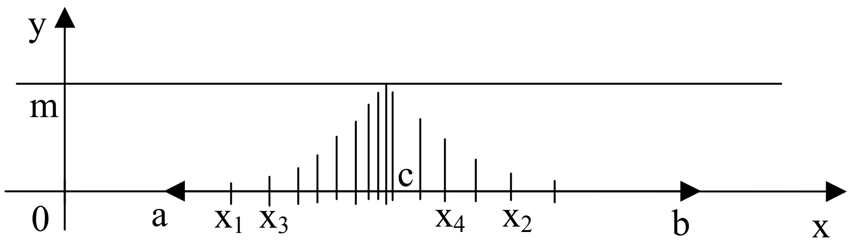

Рис. 14

3) $f(x''_1); f(x''_2); f(x''_3); ... f(x''_n); ...$ (рис. 15)

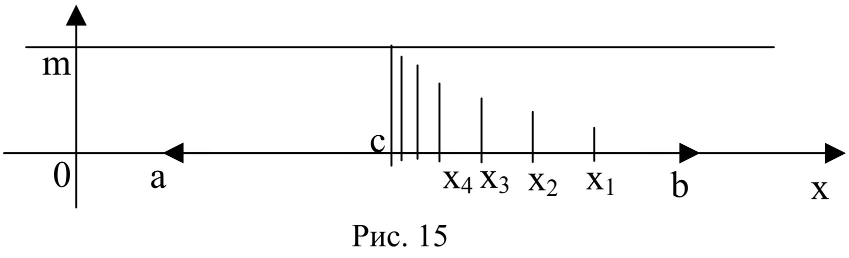

Рис. 15

Рассматривая последние три последовательности и их графики (рис. 13, 14, 15), можно составить представление о поведении функции при стремлении ее аргумента к точке сгущения *c*.

Представим, что любая последовательность соответствующих значений функции стремится к *m*. Тогда есть смысл считать, что функция *f(x)* имеет предел, равный *m*. Если же найдется хотя бы одна числовая последовательность значений аргумента, для которой последовательность соответствующих значений функции стремится к пределу, отличному от *m,* то тогда нецелесообразно считать, что функция *f(x)* стремится к *m*.

Прежде чем формулировать определение понятия предела функции, рассмотрим частный случай стремления функции к конечному пределу.

Пусть имеем функцию $f(x) = x^2$, заданную на множестве [0; 4). Число 2 является точкой сгущения этого числового множества. Рассмотрим поведение этой функции при приближении x к 2.

Так как точка 2 является точкой сгущения числового множества [0; 4), то из этого множества можно выделить бесконечное множество числовых последовательностей, стремящихся к 2. К числу таких последовательностей относится последовательность с общим членом $x_n = 2$. Однако в дальнейшем будем иметь в виду в подобных случаях только числовые последовательности, члены которых не совпадают с точкой сгущения, в данном случае с точкой 2.

Рассмотрим две произвольные числовые последовательности, стремящиеся к 2, члены которых принадлежат области определения данной функции:

а) убывающую: $x_n = 2 + \frac{1}{10^n}$; $\lim x_n = \lim(2 + \frac{1}{10^n}) = \lim 2 + \lim \frac{1}{10^n} = 2$;

б)колеблющуюся: $x'_n = 2 + \frac{2(-1)^n}{n}$; $\lim x'_n = \lim[(2 + \frac{2(-1)^n}{n}] = \lim 2 + \lim \frac{2(-1)^n}{n} = 2$.

Составим последовательности $\{y_n\}$ и $\{y'_n\}$ значений функции $y=x^2$, придавая аргументу x значения:

а) x_1;, x_2 ; x_3 ; ...; x_n; ...,

б) $x'_1; x'_2; x'_3; ...; x'_n; ...$,

и найдем их пределы. Результаты выполнения этой работы внесем в таблицу.

Общий член числовой последова-	Значения членов последова-				Предел числовой последовательности
	1	2	3	...	

$x_n = 2+\dfrac{1}{10^n}$ $y_n = x_n^2 = \left(2+\dfrac{1}{10^n}\right)^2$	2,1 $2{,}1^2$	'2,01 $2{,}01^2$	2,001 2,0012	. . . . . .	$\lim(2+\dfrac{1}{10^n}) = 2$ $\lim(2+\dfrac{1}{10^n}) = 4$
$x'_n = 2+\dfrac{2(-1)^n}{n}$ $y'_n = \left[2+\dfrac{2(-1)^n}{n}\right]^2$	0 0	3 3^2	$1\dfrac{1}{3}$ $\left(1\dfrac{1}{3}\right)^2$	. . . . . .	$\lim\left[2+\dfrac{2(-1)^n}{n}\right] = 2$ $\lim\left[2+\dfrac{2(-1)^n}{n}\right]^2 = 4$

Последовательности $\{y_n\}$ и $\{y'_n\}$ при $x \to 2$ имеют один и тот же предел.

Последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ были взяты произвольно из бесконечного множества последовательностей, стремящихся к 2 и выделенных из области определения функции $y = x^2$. Мы установили, что каждая из последовательностей $y_n = (x^n)^2$ и $y'_n = (x'_n)^2$ имеет один и тот же предел, равный 4. Возникает проблема: будет ли это верно для любой последовательности, выделенной из области определения данной функции и стремящейся к 2? Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем любую из них $\{x_n\}$. Тогда $\lim_n^2 = \lim x_n$ $\lim x_n = 2 \cdot 2 = 4$.

Итак, для любой последовательности $\{x_n\}$, выделенной из области определения данной функции и стремящейся к 2, члены которой отличны от 2, соответствующая последовательность значений функции

$f(x); f(x_1); f(x_2); f(x_3); \ldots; f(x_n); \ldots$

стремится к одному и тому же пределу, равному 4.

В этом случае говорят, что функция $y = x^2$ при $x \to 2$ имеет предел, равный 4, и пишут $lim\ x^2=4$.

Затем вводится определение**:**

Определение: **число** b **называется пределом функции f(x) при** $x \to$ **a, если для любой последовательности значений аргумента** x_1, x_2, x_3, **…** , x_n, **… выделенной из области определения функции f**(x) **и стремящейся к** a, **но отличных от** a $\{x_n \neq a\}$, **соответствующая последовательность значений данной функции** $f(x_1); f(x_2); f(x_3); \ldots; f(x_n); \ldots$ **имеет один и тот же предел, равный** b.

Здесь надо обратить внимание учеников на то, что в определении предела функции имеется в виду любая числовая последовательность, выделенная из области определения функции и стремящейся к a, кроме последовательности $x_n = a$, несмотря на то, что эта последовательность так же стремится к a^2.

Если хотя бы для одной последовательности $\{x_n\} \to a$ последовательность $f(x_n)$ соответствующих значений функции предела не имеет или для двух различных числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$, стремящихся к a, последовательности соответствующих значений функции $f(x_n)$ и $f(x'_n)$ имеют различные пределы, то по определению функция $f(x)$ при $x \to a$ предела не имеет.

Затем следует привести символическую запись определения понятия предела функции.

Пусть дана функция f(x), .определенная на числовом множестве A. Тогда:

$$\underset{x\to a}{f(x)\to b} \Leftrightarrow (\forall\{x_n\}\to a)\ (x_n\in A)\ (x_n\neq a)\ (f(x_n)\to b).$$

Не следует от учеников требовать заучивания наизусть определения предела функции. В данном случае будет лучше всего если ученик своими словами правильно передаст смысл этого определения и приведет его символическую запись.

Представим себе, что в определении предела функции предполагается, что среди последовательностей значений аргумента, стремящихся к a, должна быть последовательность с общим членом $x_n = a$. Тогда в рассматриваемом случае мы должны были бы в множество последовательностей, стремящихся к 0 и выделенных из области определения данной функции, включить последовательность с общим членом $x_n = 0$.

Для последовательности 0; 0; 0; **..;** 0;... значений аргумента x последовательность соответствующих значений функции имела бы вид: f (0); f (0); f (0); ... ; f (0); ... или по условию: 2; 2; 2; ...; 2; ..., предел которой равен 2.

Таким образом, для различных числовых последовательностей, выделенных из области определения данной функции и стремящихся к 0, последовательности соответствующих значений данной функции имели бы различные пределы. Тогда с точки зрения предполагаемого определения данная функция предела не имела бы.

Таким образом, отсутствие ограничения , указанного в определении предела функции, сузило бы класс функции, имеющих пределы.

Из школьного курса математики учащиеся твердо знают, что делить на ноль нельзя. Кроме того, им известно, что предел частного двух последовательностей равен частному их пределов при условии, что предел делителя не равен нулю. В связи с этим у некоторой части учащихся могут вызникнуть недоумения в случае нахождения пределов функций вида $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ при $x \to a$.

---

[2] Это ограничение связано с тем, что при изучении функций существенно знать поведение функции вблизи той точки, в которой отыскивается ее предел. Заметим, что при отсутствии этого ограничения сужается класс функций, имеющих предел

Причина этого недоумения в том, что эта часть учащихся считает, что переменная, стремящаяся к определенному пределу, непременно достигает его, т. е. что **предел является последним значением переменной**. Между тем определение предела функции предполагает, что ни аргумент, ни функция своего предела могут не достигать. Понимание этого положения важно в связи с изучением понятия производной, в котором имеется в виду, что предел делителя и делимого равны нулю. Нужно показать, что хотя делимое и делитель стремятся к нулю, сама функция стремится к определенному пределу. С этой целью предложим учащимся следующее упражнение:

Пример 1

Найти: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$; - ∞ < x < 1; 1< x < ∞.

Обратим внимание учеников на то, что при $x \to 1$ знаменатель данной дроби стремится к нулю и поэтому в этом случае теорема о пределе частного не применима.

Аргумент *x* стремится к 1, не принимая значение, равное единице. Поэтому дробь $\frac{x^2-1}{x-1}$; можно сократить на *x*— 1.

Итак, при всех *x*, отличных от 1, справедливо равенство $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$.

Пример 2

Имеем: $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$.

При отыскании предела функции *x*+1 при x → 1 мы не интересовались значением этой функции при *x*=1. Так как при всех остальных значениях *x* функции $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ и *f(x)*==*x* + 1 равны, то должны быть равны и их пределы при $x \to 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

Приведенное рассуждение символически можно записать так:

$$(\forall x \neq 1)\ \ \left(\frac{x^2-1}{x-1}=x+1\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)\right).$$

Учащиеся должны усвоить, что в рассмотренном случае делимое и делитель при $x \to 1$ стремятся к нулю, однако сама функция стремится к определенному пределу. Это объясняется тем, что переменная *x,* стремящаяся к 1, своего предельного значения не достигает: ее значения могут сколь угодно мало отличаться от 1, но ни одно из них не может быть равно 1. Вследствие этого было возможным сокращение дроби $\frac{x^2-1}{x-1}$ на *x* — 1. *В* результате этого преобразования нахождение предела функции $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ свелось к нахождению предела функции $f(x) = x + 1$.

Однако нельзя думать, что переменная не может принимать значения, равного своему пределу. Так, последовательность с общим членом $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$, стремясь к нулю, принимает бесконечное множество раз значение, равное 0.

Предел числовой последовательности с общим членом $x_n = 2$ равен 2. В этом случае последовательность достигает своего предела.

Для упрощения нахождения пределов функций необходимо ввести теоремы о пределах суммы, произведения и частного функции. Доказательство теорем о пределах функций выполняется просто, если пользоваться определением предела функции «на языке последовательностей». При изучении темы «Предел функции» важно добиться понимания определения понятия предела функции. Число уроков, отводимое на эту тему не позволяет рассматривать ее в более широком плане (в отличии от института). Приведем доказательство теоремы о пределе суммы двух функций. Теоремы о пределах произведения и частного двух функций доказываются аналогично.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на числовом промежутке (a, b) и $\lim f(.x)=A;$ $\lim \varphi(x)=5$, причем $c\in(a, b)$.
Тогда: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+\varphi(x)]=A+B$.

Доказательство. То, что $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=B$, означает, что для любой числовой последовательности $\{x_n\}$, выделенной из промежутка (a, b) и стремящейся к с, имеем: $f(x_n)\to A$ и $\varphi(x_n)\to B$.

Выражение $f(x_n) + \varphi(x_n)$ представляет собой переменную, которая принимает значения: $f(x_1) + \varphi(x_1); f(x_2) + \varphi(x_2); \ldots; f(x_n) + \varphi(x_n);\ldots$

По теореме о пределе суммы двух числовых последовательностей имеем: $\lim [f(x_n) + \varphi(x_n)] = f(x_n) + \lim \varphi(x_n) = \mathrm{A} + \mathrm{B}$.

В силу определения предела функции: $\lim [f(x) + \varphi(x)] = \mathrm{A} + \mathrm{B}$.

Из теоремы о пределе произведения функций формулируется следствие о том, что постоянный множитель можно выносить за знак предела.

После выполнения упражнений следует рассмотреть некоторые частные случаи стремления функции к пределу. Предварительно учащихся следует познакомить с понятием бесконечно большой величины.

Допустим, что переменная величина x изменяется так, что, начиная с некоторого момента, может превзойти любое сколь угодно большое положительное число А, например 10^7; 10^{30} и т. д., и в дальнейшем оставаться больше этого числа. Такую величину графически можно представить в виде точки, движущейся вправо по оси OX и неограниченно удаляющейся от начала

O. Какую бы точку A_1 мы ни взяли на оси *OX* вправо от начала O, точка *A*, соответствующая переменной *x*, начиная с некоторого момента, окажется правее ее.

При этом условии переменная величина *x* называется **бесконечно большой**. О такой величине говорят, что она стремится к бесконечности, и пишут $x \to \infty$ или $\lim x = \infty$.

Аналогично этому переменная величина *x* может уменьшаться так, что начиная с некоторого момента станет меньше любого отрицательного числа, сколь угодно большого по абсолютной величине, и при дальнейшем изменении будет оставаться меньше его.

Такую переменную величину можно представить в виде точки, бесконечно удаляющейся по оси абсцисс влево от начала *O*.

Такая величина также называется бесконечно большой. В этом случае пишут: $x \to -\infty$ или $\lim x = -\infty$.

Итак, переменная величина, которая изменяется так, что начиная с некоторого момента по абсолютной величине может превзойти любое сколь угодно большое положительное число и в дальнейшем оставаться больше его, называется бесконечно большой.

Примеры бесконечно больших величин:

1) $x ==$ —4; 0; 4; .... В данном случае $x \to \infty$.

2) $x =$ —4; —5; —6; ...; —*n*; ... . В данном случае $x \to -\infty$.

3) $x =$ —1; 2; —3; 4; —5; ... . В данном случае $|x| \to \infty$.

1.5. Непрерывность функции

Понятие непрерывности отражает свойства многих процессов окружающей нас действительности и является одним из важных понятий математики. Введение этого понятия в курс математики позволяет в дальнейшем более строго рассмотреть темы «Производная» и «Интеграл».

Понятие непрерывности функции является трудным для усвоения учащимися, и поэтому методика его изучения должна быть тщательно продумана учителем.

Перед введением понятия непрерывности функции необходимо:

1) повторить определение предела функции; 2) показать, что существуют функции, которые не имеют предела в некоторых точках области определения. Примером такой функции является функция $y = [x]$, которая определена для любого значения аргумента, но не имеет предела ни в одной из целочисленных точек; 3) показать существование функций, пределы которых в некоторых точках не совпадают со значениями этих функций в указанных точках. Приведем пример такой функции.

Как известно, число агрегатных состояний воды различно в зависимости от ее температуры. При $t < 0$ вода находится в твердом состоянии (одно агрегатное состояние), при $0° < t < 100°$ — в жидком состоянии (одно агрегатное состояние) и при $t = 0$ мы наблюдаем лед, плавающий на поверхности воды (два агрегатных состояния). Связь между температурой воды и числом ее агрегатных состояний выражается следующей функцией:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t < 0 \\ 2, & \text{если t} = 0 \\ 1, & \text{если } 0 < t < 100 \end{cases}$$

Имеем: $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 1$. Между тем при t = 0 значение функции равно 2.

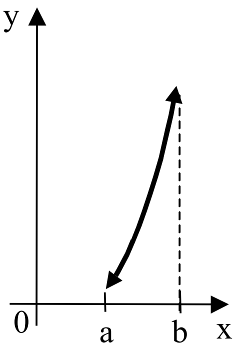

Рис.20

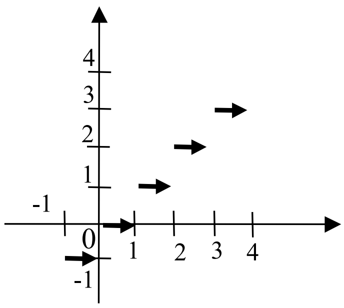

Рис.21

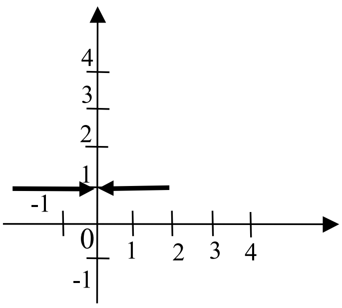

Рис.22

Введение понятия непрерывности функции в школе нужно связать с наглядными представлениями о графиках непрерывных и разрывных функций.

Графики функций, изображенные на рисунках 20—22, могут быть использованы для формирования понятия непрерывности функции.

График функции $f(x)=x^3$, определенной на промежутке (a, b) (рис. 20), есть сплошная линия, не имеющая разрывов. Эту линию можно провести карандашом, не отрывая его от чертежа. Говорят, что функция, изображенная на этом графике, является непрерывной.

График функции $y = [x]$, определенной на всей оси абсцисс, состоит из бесконечного множества не связанных между собой отрезков (рис. 21). В этом случае говорят, что функция $y = [x]$ в целочисленных точках терпит разрыв.

На рисунке 22 изображен график функции $f(t)$, терпящей разрыв в точке $x = 0$. В этом случае разрыв графика происходит потому, что из непрерывной линии (в данном случае прямой) вынута точка с абсциссой $x = 0$ и поднята выше этой линии.

В результате обзора приведенных графиков у учеников должно сложиться наглядное представление о разрывных и непрерывных функциях.

Сравнивая графики непрерывных и разрывных функций и их существенные признаки, придем к определению непрерывности функции:

1) Функция $y=[x]$, график которой изображен на рис. 21, определена на множестве всех действительных чисел и не имеет предела ни в одной из целочисленных точек. В этих точках функция $y=[x]$ терпит разрыв.

1) Функция $f(x)=x^3$ имеет предел в каждой точке области определения.

2) Функция, график которой изображен на рис. 22, имеет разрыв в точке $x=0$. В этой точке $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=1$, между тем функция f(t) в точке с абсциссой 0 равна 2.

2) Предел функции $f(x)=x^3$ в любой точке области ее определения совпадает с ее значением в этой точке.

Таким образом можно сформулировать существенные признаки понятия непрерывности функции. Затем вводится определение: **функция** *f(x)* **называется непрерывной в точке** *a*, **если 1) существует предел функции в точке** *a*, **2) предел функции в точке** *a* **совпадает с ее значением в точке** *a.* Итак, функция *f(x)* непрерывна в точке $a \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)) \wedge (\lim\limits_{x\to a} f(x)) = f(a))$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то она называется непрерывной на этом промежутке.

Приведенное определение понятия непрерывности функции в данной точке является наиболее доступным для учащихся и дает простой способ отыскания предела непрерывной функции: чтобы найти предел непрерывной функции $f(x)$ при $x \to c$, достаточно в аналитическое выражение этой функции вместо x подставить число c.

1.6. Теоремы о сумме, произведении и частном непрерывных функций.

Доказательство теорем о непрерывности суммы, произведения и частного двух непрерывных функций является хорошим материалом для прочного усвоения понятия непрерывности

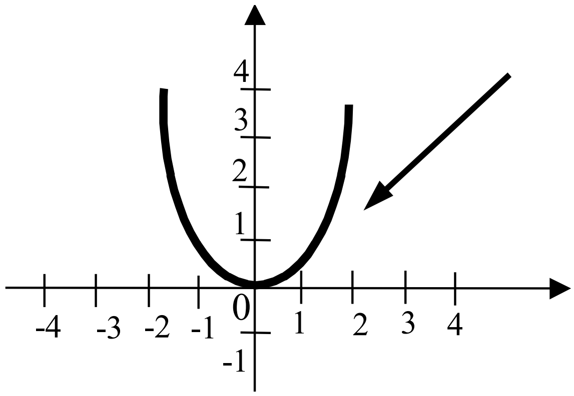

Рис.23

функций. Первую из следующих теорем лучше доказать, на классных занятиях, а доказательство двух остальных может быть предметом самостоятельной работы учащихся.

Теорема 1. **Сумма функций** $f_1(x)$ и $f_2(x)$, **непрерывных в точке а, есть функция, непрерывная в той же точке.**

Доказательство. Пусть каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывна в точке *a*. Это значит, что $\lim_{x\to a} f_1(x) = f_1(a)$ и $\lim_{x\to a} f_2(x) = f_2(a)$. Тогда в силу теоремы * (стр. 37) сумма $F(x)=f_1(x) + f_2(x)$ в точке *a* также будет иметь предел

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) = f_1(a) + f_2(a) = F(a).$$

Следовательно, функция $F(x)$ непрерывна в точке а.

Следствие. **Разность функций, непрерывных в данной точке, есть функция, непрерывная в этой точке.**

Теорема 2. **Произведение функций** $f_1(x)$ и $f_1(x)$, **непрерывных в точке** *a*, **есть функция, непрерывная в той же точке.**

Теорема3. Частное $F(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ двух функций, непрерывных в данной точке *a*, есть функция, непрерывная в этой точке, если $f_2(a)\neq 0$.

Доказанные теоремы дают основание утверждать, что многочлен относительно *x*:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ является функцией, непрерывной относительно этой переменной в промежутке $-\infty < x < \infty$.

Дробь $F(x) = \dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются многочленами, также непрерывна в промежутке $-\infty < x < \infty$, кроме значения *x*, при котором $\varphi_2(x)=0$.

1.7. Свойства непрерывных функций.

При изучении дальнейшего материала учащиеся будут иметь дело преимущественно с непрерывными функциями, и поэтому им важно знать свойства этих функций. Свойства непрерывных функций сообщаются учащимся без доказательства, их введение сопровождается лишь графическими иллюстрациями.

Свойство I. Если функция f(x) непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она на нем ограничена, т. е. на этом сегменте $|f(x)|<K$, где K некоторое положительное число.

Символически это свойство можно записать так: если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b) \Rightarrow (\exists K>0)\ (\forall x)\ (x \in [a, b]) \times (|f(x)|<K)$.

В этом случае график функции будет находиться в полосе, ограниченной двумя, прямыми: $y = K$ и $y = —K$ (рис. 24).

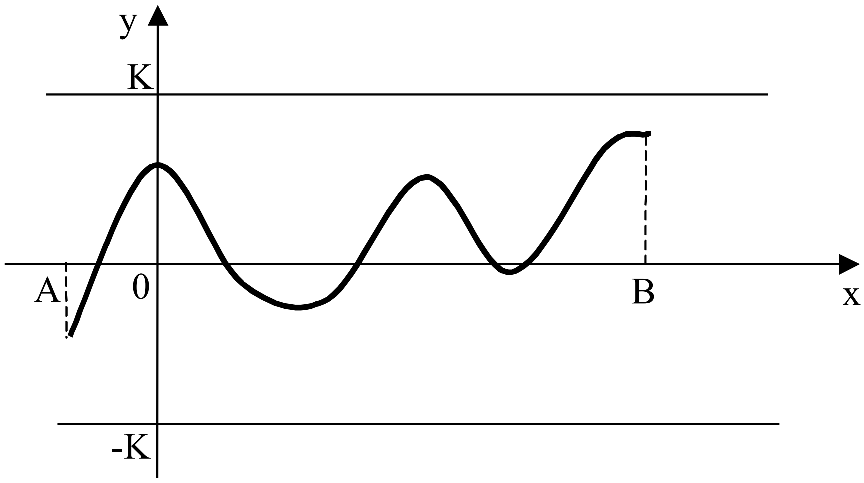

Рис.24

Следует заметить, что непрерывная функция, заданная на интервале, может, быть неограниченной. Пример такой функции: $y=\frac{1}{x}$; $0<x<1$ (рис. 25)

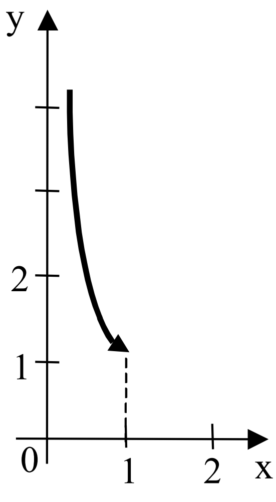

Рис.25

Свойство II. Функция f*(x),* непрерывная на сегменте [*a, b*]**,** принимает на этом сегменте наибольшее и наименьшее значения, т. е. ($\exists$ точки α, $\beta \in$ [a, b]) (f (α) = M) (f (β) = m), где *M* и *m* наибольшее и наименьшее значения функции f*(x)* на сегменте [a, b]. На графике функции *y = f (x),* определенной на сегменте [a, b], можно отметить наименьшее *m* и наибольшее *M* значения этой функции (рис. 26).

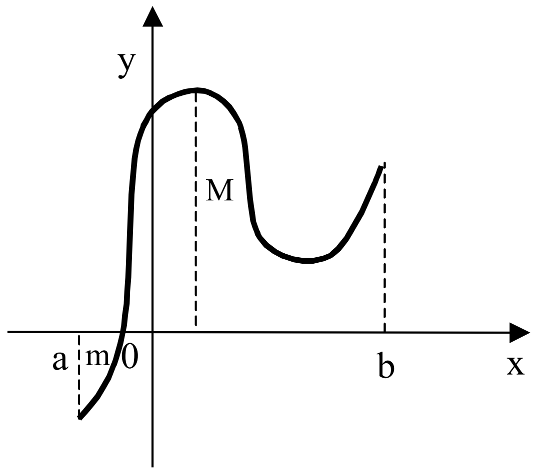

Рис.26

Непрерывная функция, заданная на интервале, может не принимать наименьшего и наибольшего значений. Примерами такой функции может служить функция y= x^3, заданная на интервале (1; 2) (рис. 27).

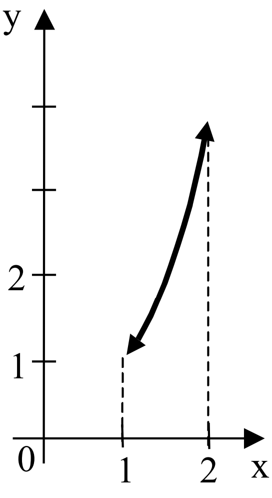

Рис.27

Свойство III. Пусть функция / *(x)* непрерывна в каком-либо промежутке и в двух каких-либо точках *x = a* и *x= b* этого промежутка принимает неравные между собой значения f(a) и f(b), и пусть *A* — какое-либо число, лежащее между числами f*(a)* и f(b). Тогда существует по крайней мере одно такое значение с аргумента *x,* лежащее между *a* и b*,* при котором функция f(*x*) принимает значение f(c) = *A*. Графическая иллюстрация (рис. 28) поможет сделать это свойство для учащихся достаточно ясным.

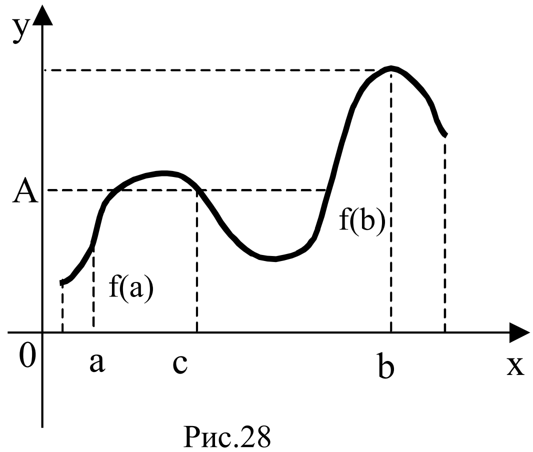

Рис.28

При рассмотрении этого свойства внимание учеников обращается на то, что если f(a) и f*(b)* имеют разные знаки, то существует такое значение с аргумента (a<c<b), при котором f(c) = 0 (рис. 29).

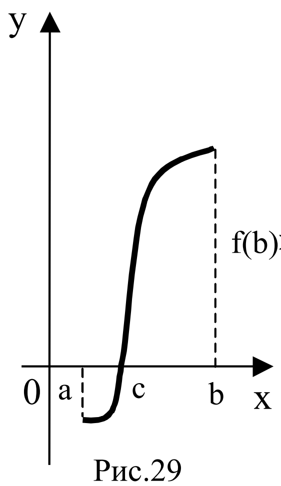

Рис.29

Небольшая справка!

Теорема1. Пусть F и G имеют пределы в точке а, тогда

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

Теорема 2. Если f и g имеют пределы в точке а, то

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

Теорема 3. Если f и g имеют пределы в точке а и

$$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0 \text{ т } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

Пример:

$$\lim_{x\to 1}(x^3+2x+7)=\lim_{x\to 1}x^3+\lim_{x\to 1}(2x+7)=1+2+7=10$$

Задания

1. $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+2x^2-3x-4)=$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^3-2x^2+3x-1}=$
3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}=$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=$
5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}=$
6. $\lim\limits_{x\to 1}(x^4-2x+1)=$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+2x-3}=$
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+5}{4x+1}=$
9. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x+4}=$
10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=$
11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{3-x}=$
12. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}=$
13. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}=$
14. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{3-x}=$
15. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x-4}=$
16. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)}{x^2+x-12}=$
17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+2x-3}=$

Пределы на бесконечность

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}=$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})=$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2-\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right]=$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{n}=$

Пределы на тригонометрические функции

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2-3\sin x+1}=$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}=$

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx\right]=$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{tg^2\frac{x}{2}}=$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 5x}=$

Пределы на параметры

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{1+a^x}=$

3. $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin a^n}{(\sin a)^m}=$

Пределы последовательностей

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)(n+2)}\right)=$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}=$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right]=$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)=$

Пределы с буквами

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=$

$m, n -$ натуральные

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgkx}{x}=$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{a}{n+1}}-1\right)n=$

$a\neq 0$